

Ancora a proposito di funzioni di utilità di una fondazione bancaria

(Francesco Chelli, Alberto Niccoli)

1. In un recente numero di *Studi e note di economia* sono apparsi un articolo di uno dei due autori di questo [Niccoli (2003)], a commento dell'interessante lavoro di Bacci e Chiandotto (2002), e un ulteriore intervento di questi ultimi [Bacci e Chiandotto (2003)]. Il tema del contendere nei tre lavori riguarda la forma della funzione di utilità della Fondazione della Cassa di Risparmio di Firenze. Utilizzando una procedura proposta da Wakker e Deneffe (1996), Bacci e Chiandotto (2002) hanno stimato alcuni punti della funzione di utilità di 8 componenti del Consiglio di Amministrazione della Fondazione, sia con il cosiddetto metodo *outward*, od OTO, cioè uno per il quale i punti sono stimati a partire dal valore 0 per x e $U(x)$, sino a giungere a quello pari a uno di x e di $U(x)$, sia con il metodo *inward*, od ITO, nel quale invece si parte dal punto 1, 1 per x e $U(x)$, per giungere a ritroso a quello 0, 0. Quindi, per ognuno degli otto componenti, cioè per $i = 1, 2, \dots, 8$, sono state stimate le seguenti grandezze:

$U(x)$	$U_i(x_i) = 0$	$U_i(x_i) = 0,25$	$U_i(x_i) = 0,5$	$U_i(x_i) = 0,75$	$U_i(x_i) = 1$
x^{OTO}	0	$x_i[U_i(x_i) = 0,25]^{OTO}$	$x_i[U_i(x_i) = 0,5]^{OTO}$	$x_i[U_i(x_i) = 0,75]^{OTO}$	1
x^{ITO}	0	$x_i[U_i(x_i) = 0,25]^{ITO}$	$x_i[U_i(x_i) = 0,5]^{ITO}$	$x_i[U_i(x_i) = 0,75]^{ITO}$	1

ovvero sono stati stimati i valori di x , a livello di ogni singolo componente del Consiglio, per i quali $U_i(x_i)$ assume il valore 0,25, o 0,5, o 0,75, sia con il metodo OTO sia con quello ITO; per ipotesi i valori di x_i per i quali $U_i(x_i) = 0$, oppure $= 1$, sono rispettivamente pari, anch'essi, a zero e ad uno.

In entrambi i lavori, Bacci e Chiandotto, pur avendo determinato sia i valori OTO, sia quelli ITO, utilizzano poi solo i primi per stimare la funzione di utilità del Consiglio di Amministrazione dell'Ente Fondazione Cassa di Risparmio di Firenze – d'ora in poi CdA dell'Ente FCRF; essi suppongono che i valori di x corrispondenti ai valori dell'utilità pari a 0, 0,25, 0,5, 0,75 e 1 siano pari alle medie degli otto corrispondenti valori per i singoli componenti del CdA. Inoltre, nel secondo lavoro, e a giustificazione della propria scelta di utilizzare solo le stime OTO, essi ricordano una valutazione formulata in Fennema e Van Assen (1999, p. 291)¹ e aggiungono poi che il metodo *inward* può presentare problemi legati al fatto che il valore di x_i per il quale $U_i(x_i) = 0$ non può essere negativo. Dopo la citazione del passo di Fennema e Van Assen, essi tuttavia riconoscono che “le

¹ “The comparison between the inward and outward procedure do suggest that the utilities of the inward procedure are biased from linearity”.

considerazioni sin qui riportate non forniscono alcuna “dimostrazione” della superiorità del metodo OTO rispetto al metodo ITO”. Sul piano empirico, essi nel primo articolo affermano che l’atteggiamento medio dei componenti del Consiglio implica, per valori bassi di x , un atteggiamento di propensione al rischio, che si trasforma in avversione al rischio per valori elevati di x .

Nel commento a tale articolo, uno di noi aveva affermato che i dati OTO implicano neutralità al rischio, mentre l’utilizzazione, a fianco degli stessi, anche di quelli ITO migliora le qualità della stima della funzione di utilità, in termini di residui più piccoli, e ne comporta una caratterizzata da avversione al rischio per tutti i valori di x e di U .

A seguito di queste valutazioni critiche, nel loro secondo lavoro i due autori presentano una loro stima per la funzione di utilità del Consiglio di Amministrazione della Fondazione. Essi la ottengono, sempre con i dati OTO, con la cosiddetta *Inverse Power Trasformation function*, cioè una funzione che è stata proposta in Smidts, (1997) e Pennings e Smidts (2003), e che ha “caratteristiche molto interessanti; infatti si presenta molto flessibile sia per quanto concerne il grado di simmetria rispetto ad ogni punto di flesso sia nei riguardi della collocazione dello stesso punto rispetto ai limiti inferiore o superiore” [Bacci e Chiandotto (2003), p. 50]. La funzione ha la seguente specificazione²:

$$[1] \quad U(x) = \frac{1}{(1 + \exp\{-\alpha - (\beta / \gamma) \ln(1 + \gamma x)\})}$$

La funzione, evidentemente non lineare in x , viene stimata con la procedura NLIN del pacchetto statistico SAS, dopo aver assunto, seguendo una “procedura molto empirica” [Bacci e Chiandotto (2003), nota 6, p. 50] e francamente discutibile, che vi siano duecento, e non otto, osservazioni sia in $(x=0; U(x)=0)$ sia in $(x=1; U(x)=1)$. I valori dei parametri ottenuti nella stima sono: $\alpha = -4,0138$; $\beta = 8,0937$ e $\gamma = 0,0342^3$; $R^2 = 0,897$. La funzione stimata ha l’andamento rappresentato nella Fig. 1, ovvero ha un chiaro andamento ad S, a conferma dell’affermazione formulata nel primo lavoro di atteggiamenti fortemente propensi al rischio per valori bassi di x , e fortemente avversi per valori elevati⁴.

² Nella specificazione riportata nell’articolo pubblicato non appare l’*inverse*, cioè l’ “1/”; si tratta evidentemente di un puro errore materiale, perché la funzione rappresentata nella fig. 5 del loro lavoro e riportata anche in questo articolo come fig. 1, è basata sulla specificazione corretta. Più grave appare il fatto che la funzione, per la sua specificazione, non può passare per il punto (0, 0) e (1,1); ciò spinge gli autori a supporre, come ricordato nel testo, che vi siano 200 osservazioni per ciascuno dei due punti estremi, in modo di forzare i coefficienti stimati verso l’origine degli assi e il punto (1,1).

³ I valori dei parametri da noi stimati differiscono, seppure di poco, da quelli ottenuti da Bacci e Chiandotto, nonostante si siano applicati tutti i metodi iterativi previsti dalla procedura NLIN del SAS.

⁴ E’ interessante notare il fatto che nel secondo lavoro la figura viene presentata, ma non viene detto che la sua forma ad S implica propensione al rischio dapprima, ed avversione poi. Probabilmente, quanto mostrato nel seguito di questo articolo spiega il perché di questa “strana” omissione, nonostante il fatto che la forma ad S sia ben evidente.

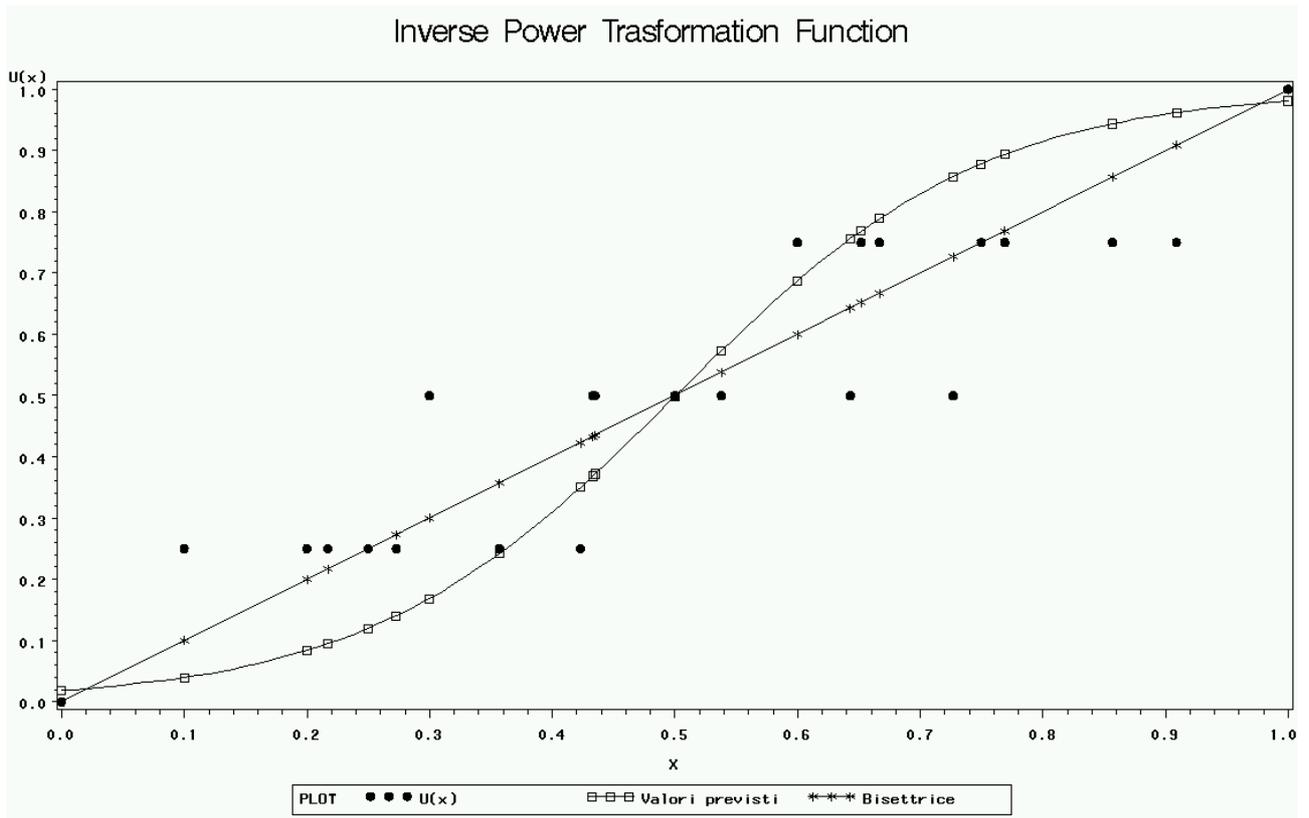


Fig. 1. La funzione *Inverse Power Trasformazione* stimata (*Valori previsti*), la retta relativa alla neutralità al rischio (*Bisettrice*) e i punti ($U(x)$) relativi alle combinazioni ($x_i, U_i(x_i)$) per i diversi valori dell'utilità e i diversi componenti del CdA.

Nella figura appena presentata, abbiamo aggiunto, rispetto alla versione pubblicata dai due autori, sia la bisettrice, che implica neutralità nei confronti del rischio, sia i punti rappresentanti le combinazioni di x_i e di $U_i(x_i)$ corrispondenti alle stime OTO per gli otto componenti del CdA poste alla base della procedura. Due caratteristiche della funzione appaiono particolarmente meritevoli di sottolineatura:

1. la funzione implica un elevato grado di propensione al rischio per valori di x o di $U(x)$ intorno a 0,25, e di avversione per x , o $U(x)$ pari a 0,75;
2. per questi medesimi valori di x e di $U(x)$ la funzione interpolante è molto lontana dai punti che mostrano le combinazioni effettive.

Per quanto riguarda il primo punto, possono essere significativi i valori dell'indice relativo di avversione al rischio proposto da Pratt, e che è pari a $-xU''(x)/U'(x)$, calcolati (cfr. Appendice) in base alla funzione [1]. Essi sono mostrati nella Tab. 1.

x	U(x)	$-xU''(x)/U'(x)$
0,25	0,11931	-1,51906
0,3624075	0,25	-1,43641
0,5	0,49971	0,0145026
0,5001460	0,5	0,0168187
0,6385255	0,75	2,55017
0,75	0,878674	4,50734

Tab. 1. Indice relativo di avversione al rischio, per diversi valori di x e di U(x), secondo la [1].

I dati mostrano sia l'elevato grado di propensione al rischio per valori di x relativamente bassi, sia, parallelamente, l'ancor più elevato grado di avversione quando x o U(x) assumono valori alti. Insomma, anche se ciò non viene esplicitamente scritto dagli autori nel loro secondo lavoro, la forma della funzione interpolante conferma pienamente la loro affermazione in quello iniziale: “una funzione di utilità così fatta ... privilegia, tra i progetti di importo più modesto ..., quelli maggiormente rischiosi, ... mentre tra i progetti di grandi dimensioni ... la preferenza dovrebbe andare a quelli che presentano una maggiore sicurezza nei risultati ottenibili” [Bacci e Chiandotto (2002), pp. 33-34].

Per quanto riguarda la seconda sottolineatura, occorre notare il fatto che la funzione interpolante, mentre si adatta bene alle combinazioni di x e di U(x) prossime ai punti 0, 0; 0,5, 0,5; e 1, 1, lo stesso non può essere affermato per i valori di U(x) pari rispettivamente a 0,25 e 0,75: per U(x) = 0,25, vi sono sette punti alla sinistra⁵, e uno solo alla destra della funzione interpolante; viceversa per U(x) = 0,75. Questo risultato merita qualche approfondimento.

2. La forma ad S della funzione, quale risulta dal processo di stima del modello non lineare, non è in effetti legata, se non marginalmente, ai dati empirici, bensì appare necessaria, quando si tenga conto del fatto che tale modello viene forzato verso le osservazioni (0, 0) e (1, 1). Ovvero, al fine di interpolare in modo accettabile i punti estremi della distribuzione e di essere crescente in tutto l'intervallo [0-1] della variabile x, la funzione interpolante assume necessariamente l'andamento ad S; tale andamento, insomma, non è stimato, ma risulta ipotizzato a priori, per le altre caratteristiche della distribuzione. Ciò risulta evidente dai seguenti esempi nei quali i valori considerati per x vanno da 0 ad 1, con passo 0,1, e quelli di U(x) risultano rispettivamente pari a $x^{3/4}$, x

⁵ Due punti sono coincidenti.

e $x^{4/3}$: nel primo caso la funzione implica avversione, nel secondo neutralità e nel terzo propensione al rischio. I dati che si ottengono per x e per $U(x)$ sono riportati nella Tab. 2.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$U(x) = x^{3/4}$	0	0,178	0,299	0,405	0,503	0,595	0,682	0,765	0,846	0,924	1
$U(x) = x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$U(x) = x^{4/3}$	0	0,046	0,117	0,201	0,295	0,397	0,506	0,622	0,743	0,869	1

Tab. 2 Valori di x e di $U(x)$ per tre diverse specificazioni di $U(x)$

I valori effettivi delle tre funzioni e quelli interpolati con la *Inverse Power Transformation Function* sono mostrati nelle figure 2, 3 e 4. Risulta evidente il fatto che, contrariamente alle affermazioni di Bacci e Chiandotto, la funzione *IPT* interpola molto male i dati di partenza; in particolare, essa tende a mostrare andamenti ad S che sono assolutamente assenti nei dati di partenza, ovvero accentua il grado di propensione al rischio per bassi valori di x e di $U(x)$, e/o quello di avversione per elevati valori di x e di $U(x)$. Queste caratteristiche si manifestano sia quando i dati di partenza implicano sempre avversione (cfr. Fig. 2), sempre neutralità (cfr. Fig. 3) o sempre propensione al rischio (cfr. Fig. 4)⁶.

Al fine di valutare le caratteristiche della funzione di utilità dell'Ente FCRF appare dunque opportuno utilizzare una funzione più semplice e soprattutto tale da permettere andamenti caratterizzati non solo da derivata prima sempre positiva, ma anche da derivata seconda alternativamente sempre positiva; sempre negativa; o dapprima positiva e poi negativa; o dapprima negativa e poi positiva, a seconda del valore di x nell'intervallo [0-1]. Senza andare a cercare funzioni troppo complicate, se ne può utilizzare una di terzo grado, ovvero una funzione quale la seguente:

$$[2] \quad U(x) = a + b x + c x^2 + d x^3 + \varepsilon$$

⁶ Per le stime dei parametri cfr. Appendice

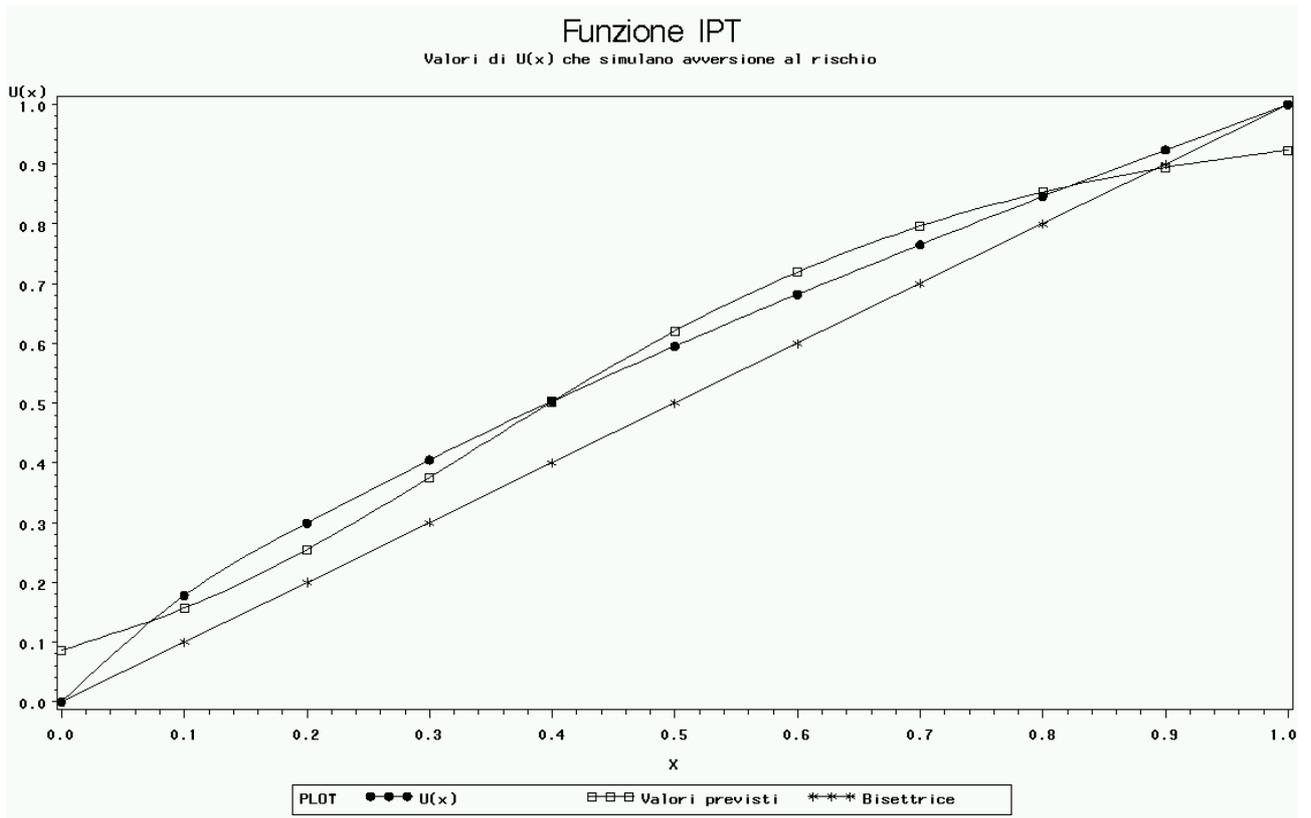


Fig. 2 Dati per i quali $U(x) = x^{3/4}$ e funzione IPT

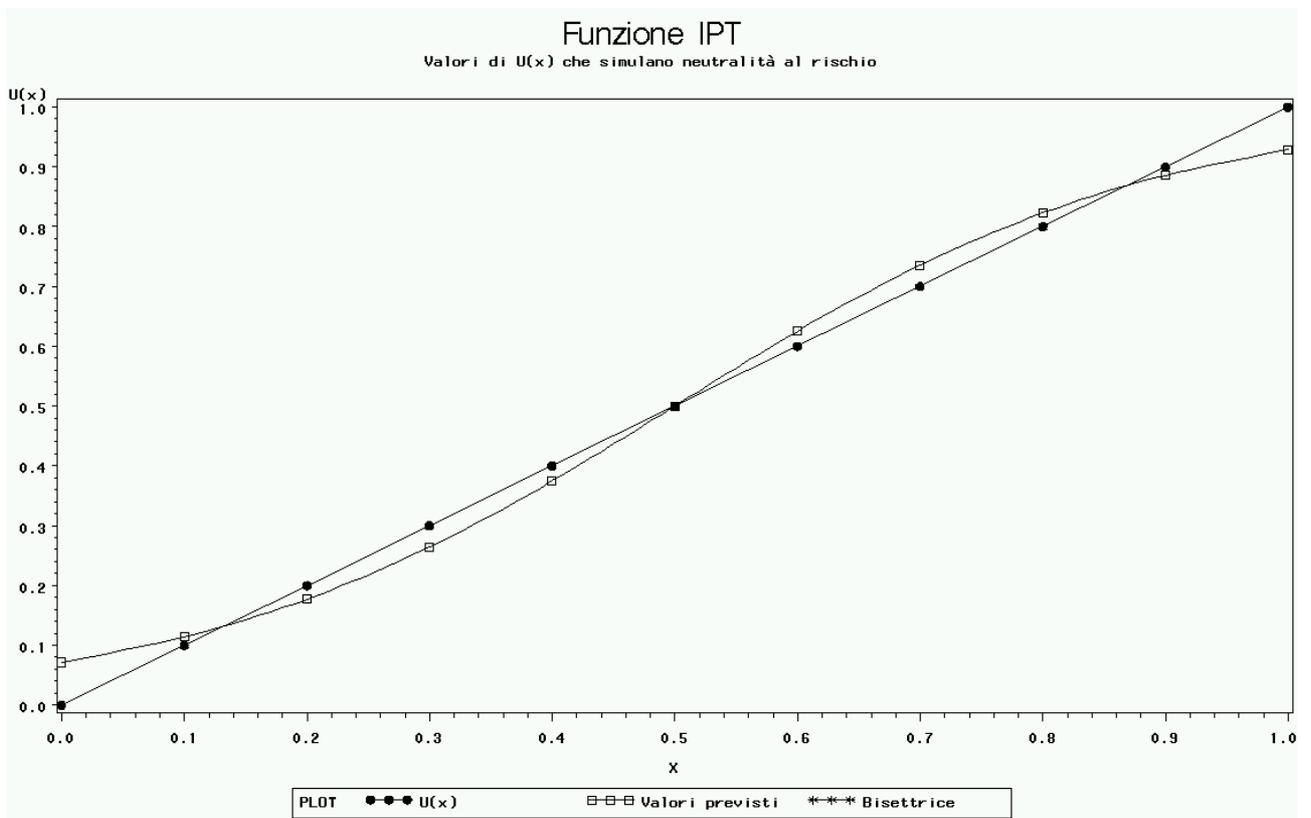


Fig. 3 Dati per i quali $U(x) = x$ e funzione IPT

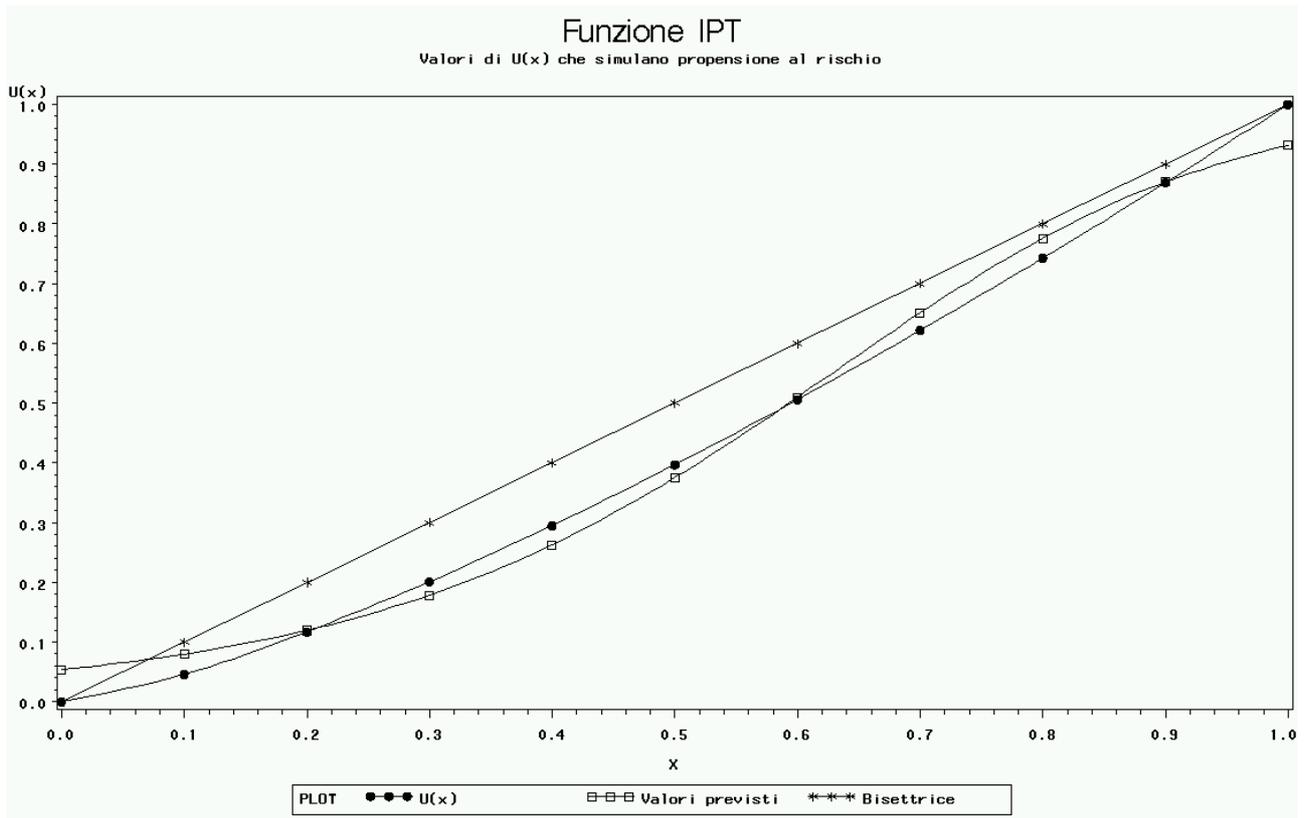


Fig. 4 Dati per i quali $U(x) = x^{4/3}$ e funzione IPT

Che questa funzione interpoli bene i dati implicanti neutralità al rischio è ovvio, perché basta porre pari a zero i parametri a , c e d e pari a uno quello b per ottenerlo. Le figure 5 e 6 mostrano poi come questa funzione interpoli assai bene anche gli altri dati della Tab. 2, senza far apparire caratteristiche che mancano in quelli di partenza. Le figure 7 e 8 mostrano poi le capacità interpolanti della funzione per dati che implicano, rispettivamente, derivata seconda prima positiva e poi negativa, e viceversa.

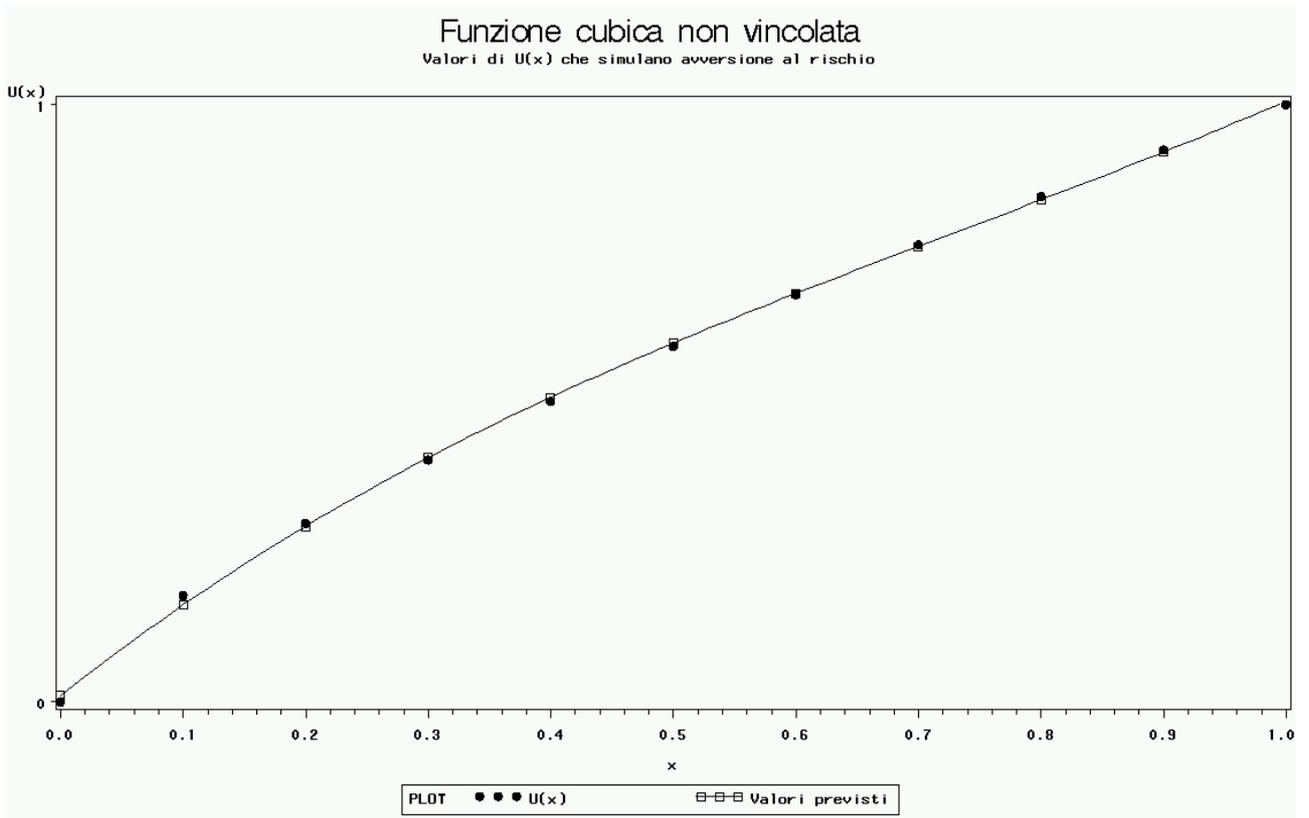


Fig. 5 Dati per i quali $U(x) = x^{3/4}$ e funzione cubica interpolante

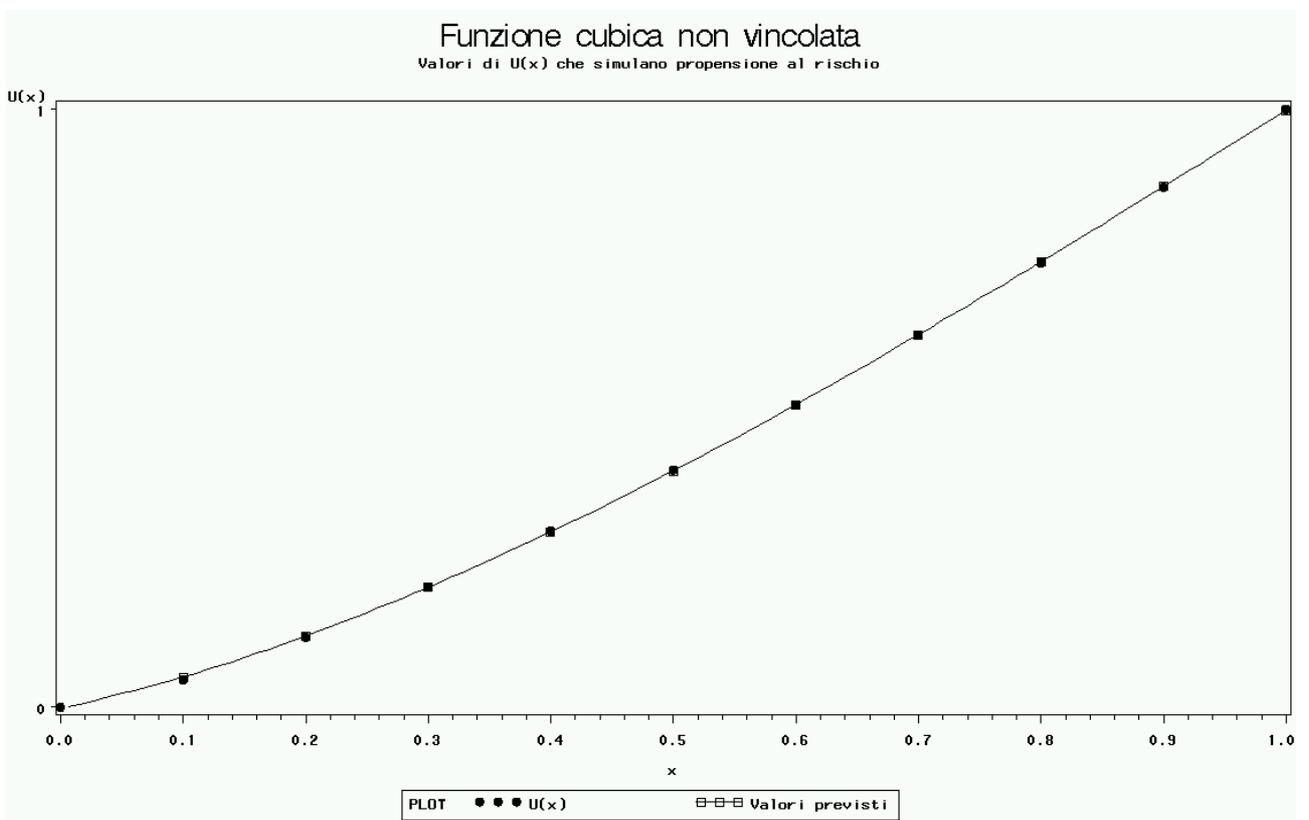


Fig. 6. Dati per i quali $U(x) = x^{4/3}$ e funzione cubica interpolante

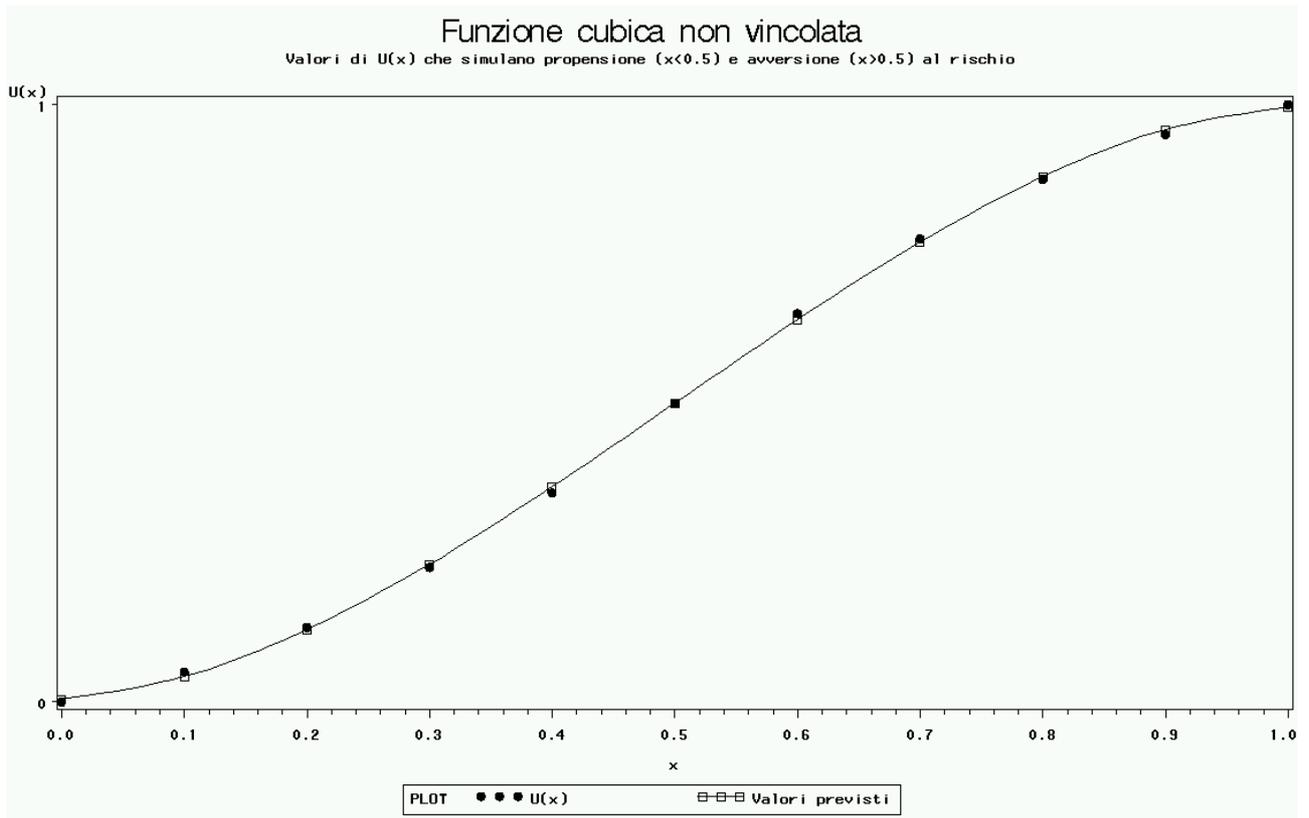


Fig. 7. Dati per i quali la funzione $U(x)$ denota prima propensione al rischio e poi avversione

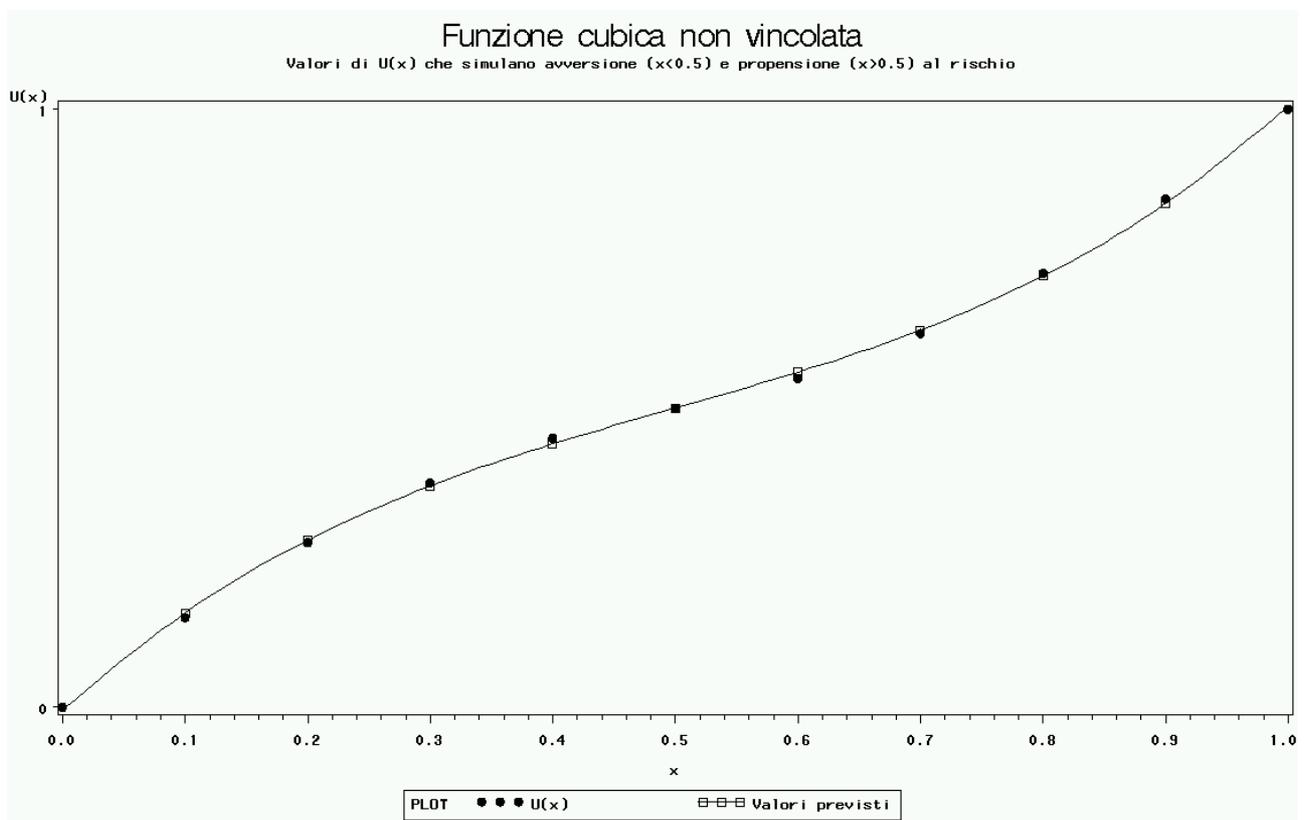


Fig. 8. Dati per i quali la funzione $U(x)$ denota prima avversione al rischio e poi propensione

Se si utilizzano i dati relativi alle stime OTO per i valori di x e di $U(x)$ relativi agli otto componenti del Consiglio della Fondazione si hanno 40 osservazioni sulle quali effettuare una stima, ovvero cinque dati per ognuno dei medesimi componenti. I risultati che si ottengono interpolandoli con una funzione cubica sono quelli indicati dalla seguente equazione:

Variabile	GdL	Parametri	Errore standard	Valore t	Pr > t
Intercetta	1	0,00593	0,02821	0,21	0,8346
x	1	1,37569	0,30333	4,54	<,0001
x^2	1	-1,17225	0,77839	-1,51	0,1408
x^3	1	0,77913	0,51235	1,52	0,1371
	R^2	SEE	$\Sigma \varepsilon^2$		
	0,9520	0,0816	0,23977		

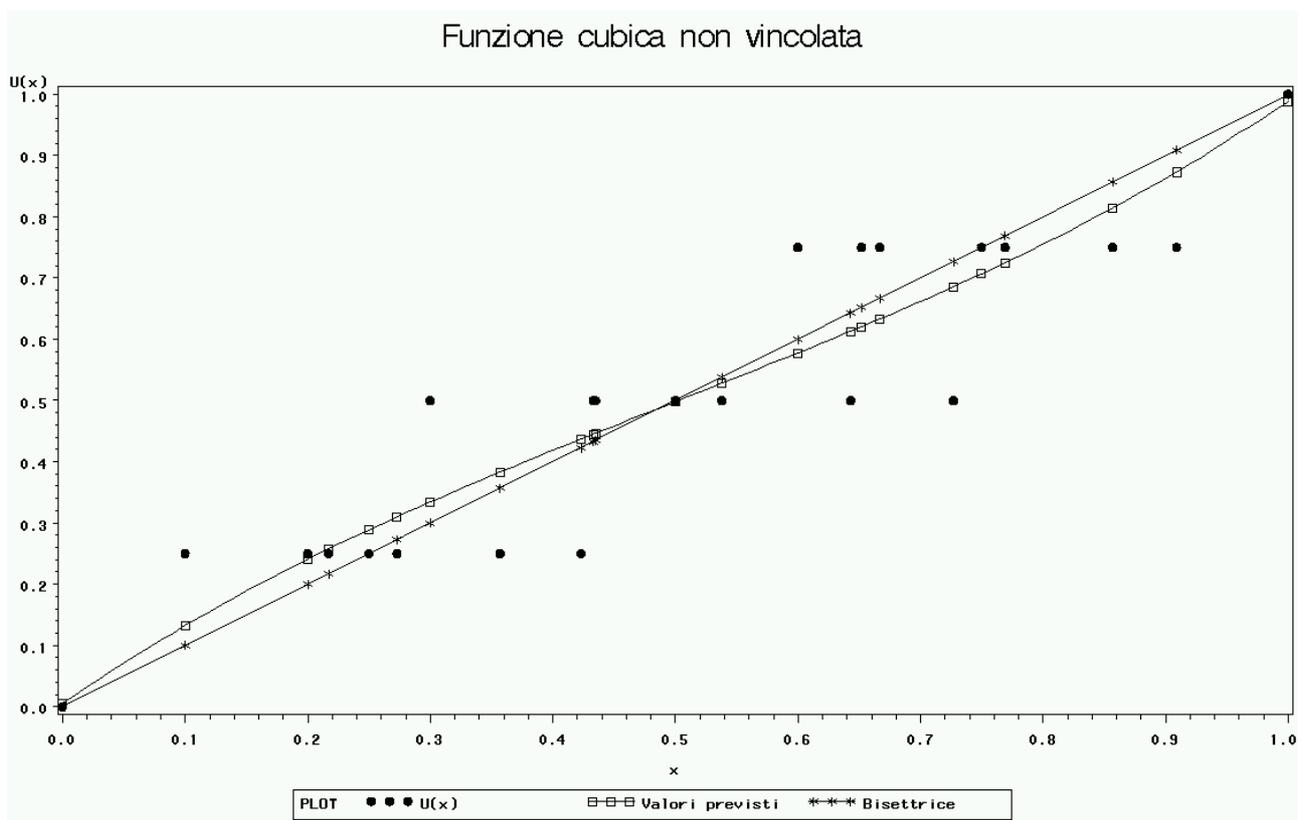


Fig. 9. Rappresentazione grafica della stima dell'eq.ne [2] (*Valori previsti*) e retta implicante neutralità al rischio (*Bisettrice*).

La Fig. 9, analoga alla Fig. 1, mostra come la funzione [2] interpola i dati di partenza e mostra pure, a paragone di quanto emergeva dall'altra figura, la migliore qualità di adattamento agli stessi. In effetti, se si calcola la somma dei quadrati degli scarti per le 40 osservazioni, tale somma risulta pari a

poco meno di 0,24 con la [2], mentre, per la curva rappresentata in Fig. 1 e sempre sulle 40 osservazioni, tale somma è pari a 0,6434. In altre parole la varianza non spiegata è, con la [2], dell'ordine del 37% di quella relativa alla funzione [1], stimata da Bacci e Chiandotto⁷.

E' anche interessante notare il fatto che, secondo l'equazione cubica, l'atteggiamento dei componenti del CdA dell'Ente FCRF è di avversione al rischio per valori relativamente bassi di x e di $U(x)$, mentre diventa di propensione al rischio per quelli elevati. Ovvero, emergono caratteristiche comportamentali esattamente opposte rispetto a quelle evidenziate da Bacci e Chiandotto in modo esplicito nel lavoro del 2002 e attraverso la Fig. 5, in quello dell'anno successivo. Torneremo fra poco sul punto relativo agli atteggiamenti di propensione e di avversione al rischio

Un miglioramento nella qualità della funzione interpolante si ha vincolando la stessa a passare per l'origine degli assi e per il punto (1, 1). La funzione da stimare in questo caso diventa la seguente:

$$[3] \quad U(x) = x^3 + b(x - x^3) + c(x^2 - x^3) + \varepsilon$$

e i parametri stimati assumono i seguenti valori⁸:

Variabile	GdL	Parametri	Errore standard	Valore t	Pr > t
$x - x^3$	1	1,43090	0,23607	6,06	<,0001
$x^2 - x^3$	1	-1,31209	0,67149	-1,95	0,0581
		SEE	$\Sigma \varepsilon^2$		
		0,07966	0,24116		

Le caratteristiche della funzione, dal punto di vista dell'adattamento ai dati e alle implicazioni in termini di avversione o propensione al rischio rimangono identiche a quelle evidenziate a proposito della Fig. 9, e quindi la figura relativa non viene presentata in questa sede⁹. L'unico elemento che vale la pena sottolineare è quello relativo ad un test F, con 2 e 36 gradi di libertà, che confronta la somma dei quadrati degli scarti per l'eq.ne [2] con quella che risulta per la [3]. Tale test, che assu-

⁷ Tale confronto risulta favorevole al modello [2] anche nel caso in cui i parametri della [1] vengano stimati, non sulle oltre 400 osservazioni come propongono Bacci e Chiandotto, ma sulle 40 in esame. La somma dei quadrati degli scarti è infatti pari, in questo ultimo caso, a 0,3692 e quindi nettamente superiore a 0,24. Per la stima si è fatto ricorso alla procedura NLIN del SAS

⁸ L'equazione è stata stimata anche nella forma più estesa: $U(x) = a + b(x - x^3) + c(x^2 - x^3) + dx^3 + \varepsilon$, per verificare se i vincoli imposti ai parametri: $a=0$ e $d=1$, risultino significativi. I test F dimostrano la validità del modello ridotto corrispondente alla [3]. In ogni caso i valori dei parametri b e c coincidono sostanzialmente con le stime presentate nel testo.

me valore 0,104, permette di confermare la correttezza dei vincoli imposti alla funzione perché passi sia per l'origine degli assi, sia per il punto (1, 1).

E' pure interessante esaminare l'ipotesi che la funzione non solo passi per questi due punti, ma sia lineare anche in corrispondenza degli altri punti (0,25, 0,25); (0,5, 0,5); e (0,75, 0,75), ovvero implichi neutralità al rischio. Dal punto di vista grafico tale funzione è rappresentata dalla bisettrice nella Fig. 9. La somma dei quadrati degli scarti che la caratterizza è pari a 0,26622¹⁰, e la statistica F relativa al confronto fra questo valore e quelli risultanti per la [2] risulta di pochissimo inferiore ad uno; ciò dimostra che la stima dei parametri della [2] non è significativamente diversa dall'ipotesi di neutralità nei confronti del rischio.

Infine, a solo titolo di esempio e senza voler rinvangare polemiche relative alla maggiore attendibilità dei dati OTO, oppure di quelli ITO, oppure di valori pari alla media fra le corrispondenti stime OTO e ITO, ci sembra opportuno presentare la Fig. 10, nella quale tali valori medi sono interpolati con una cubica del tipo della eq.ne [2]. I valori dei parametri e la figura sono i seguenti:

Variabile	GdL	Parametri	Errore standard	Valore t	Pr > t
Intercetta	1	0,00013995	0,02196	0,01	0,9950
x	1	1,64777	0,23058	7,15	<,0001
x ²	1	-1,40473	0,59253	-2,37	0,0232
x ³	1	0,75190	0,39226	1,92	0,0632
	R ²	SEE	Σ ε ²		
	0,9709	0,06353	0,14528		

⁹ Chi sia interessato alla stessa e/o ad altri elementi relativi alle diverse equazioni, può chiederli per e-mail agli autori

¹⁰ L'equazione è stata stimata anche nella forma più estesa: $U(x) = bx$, per verificare se il vincolo imposto al parametro: $b=1$, risulti significativo. Il test F dimostra la validità del modello ridotto $U(x) = x$.

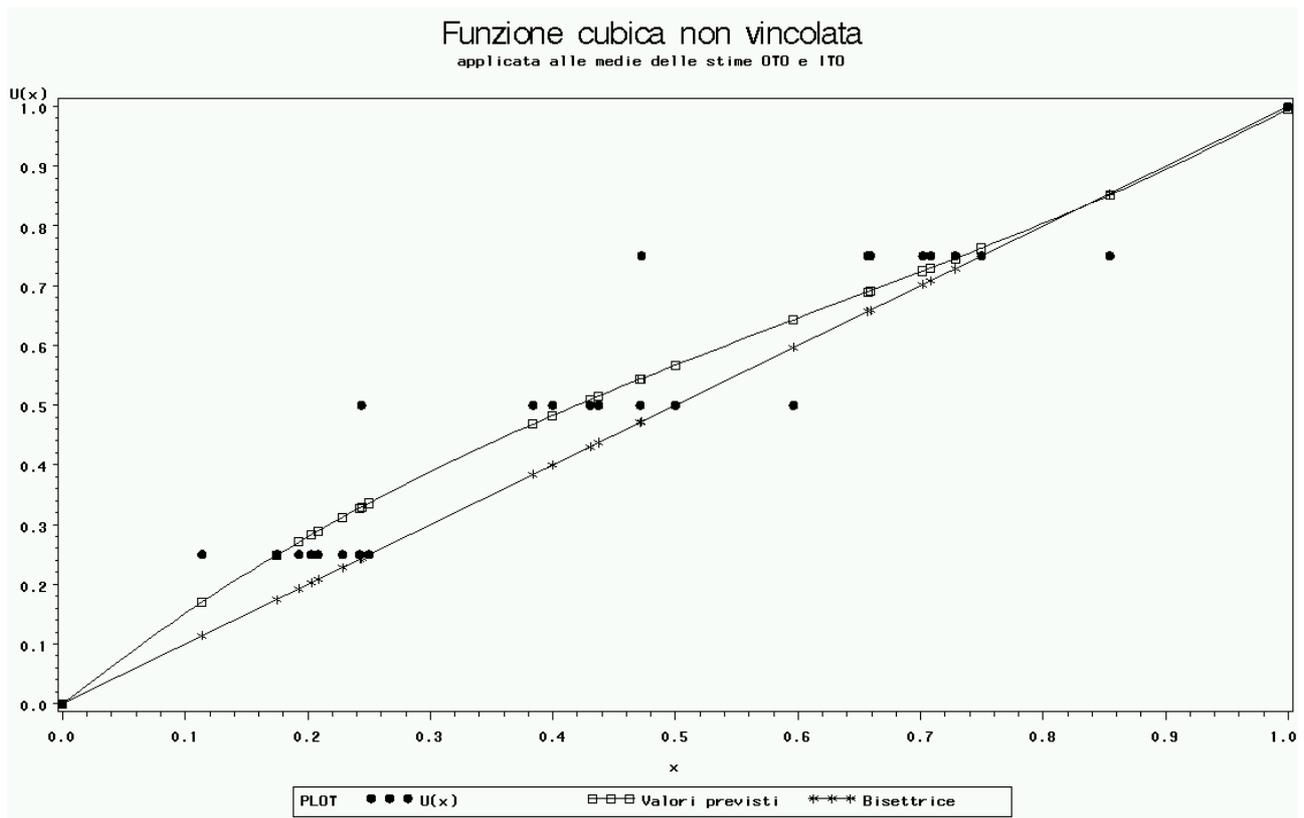


Fig. 10. Equazione cubica applicata alle medie delle stime OTO e ITO

Sia l'immagine della figura, sia i valori delle statistiche mostrano i vantaggi che si ottengono quando si tiene conto anche delle stime ITO. Il valore del coefficiente di determinazione sale fin oltre 0,97, a fronte di quelli pari a 0,95 da noi precedentemente presentati, o addirittura inferiore a 0,90 nella stima di Bacci e Chiandotto; la somma dei quadrati dei residui, pari a 0,145 nella nostra ultima stima, risulta inferiore in maniera rilevante sia rispetto alle nostre altre – che implicavano valori pari a circa 0,24 per tale statistica – sia soprattutto rispetto a quella, superiore a 0,64, stimata da Bacci e Chiandotto¹¹.

Non possiamo fare a meno di notare che l'andamento della funzione interpolante, presentata nella Fig. 10, torna a mostrare andamenti fortemente avversi al rischio per valori bassi e intermedi di x , e sostanziale neutralità per quelli più prossimi all'unità.

3. A conclusione dell'indagine ci sembra opportuno riassumere i principali risultati ottenuti:

- l'equazione stimata in Bacci e Chiandotto (2003) a proposito della funzione di utilità del CdA dell'Ente FCRF interpola molto male i dati; l'impressione che dalla stessa si ottiene di atteggiamenti propensi al rischio per valori bassi di x , e avversi per valori elevati è, ad essere ottimisti, *misleading*;

¹¹ È superiore anche nel caso in cui i parametri della [1] vengano stimati su 40 osservazioni (cfr. la precedente nota 6).

- se si utilizzano i soli dati OTO, si può scegliere fra due alternative quanto alle caratteristiche della funzione di utilità:

essa implica avversione al rischio per i valori bassi di x , e propensione al rischio per quelli elevati;

in alternativa, e per noi preferibilmente, essa implica neutralità nei confronti del rischio;

- l'utilizzazione delle stime ITO insieme a quelle OTO migliora le qualità della stima della funzione di utilità, permettendo una riduzione significativa dell'errore standard e un aumento altrettanto rilevante nel coefficiente di determinazione. In tale caso, la funzione stimata implica avversione al rischio per valori bassi e intermedi di x , e neutralità per quelli più prossimi all'unità.

Ulteriori indagini, sia sul piano teorico e metodologico, sia su quello empirico, appaiono in ogni caso opportune.

Appendice

Si consideri una funzione di utilità, specificata nel modo seguente:

$$U(x) = \frac{1}{(1 + \exp\{-\alpha - (\beta/\gamma)\ln(1 + \gamma x)\})}$$

la cui espressione è riducibile a:

$$U(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{e^\alpha (1 + \gamma x)^{\beta/\gamma}}\right)}$$

La derivata prima di U(x) è pari a:

$$U'(x) = \frac{\beta(1 + \gamma x)^{-1-\beta/\gamma}}{\left(e^\alpha \left(1 + \frac{1}{e^\alpha (1 + \gamma x)^{\beta/\gamma}}\right)^2\right)}$$

e la derivata seconda:

$$U''(x) = \frac{2\beta^2(1 + \gamma x)^{-2-2\beta/\gamma}}{\left(e^{2\alpha} \left(1 + \frac{1}{e^\alpha (1 + \gamma x)^{\beta/\gamma}}\right)^3\right)} + \frac{\beta(-1 - \beta/\gamma)\gamma(1 + \gamma x)^{-2-\beta/\gamma}}{\left(e^\alpha \left(1 + \frac{1}{e^\alpha (1 + \gamma x)^{\beta/\gamma}}\right)^2\right)}$$

È utile inoltre studiare il comportamento della derivata seconda che, ricordiamo, indica propensione al rischio, se positiva, e viceversa, avversione. La tabella seguente mostra i valori dei parametri della funzione *Inverse Power Trasformation*, stimati con la procedura NLIN del SAS, per diverse tipologie di dati:

Valori simulati di utilità che implicano:	α	β	γ
Avversione al rischio per $0 \leq x \leq 1$	-2,3572	7,0909	1,0514
Neutralità al rischio per $0 \leq x \leq 1$	-2,5589	5,1179	0,000006033
Propensione al rischio per $0 \leq x \leq 1$	-2,8762	4,2051	0,4285
Propensione ($0 \leq x \leq 0.5$) e avversione ($0.5 \leq x \leq 1$) al rischio	-3,3295	6,6591	-0,00000292
Avversione ($0 \leq x \leq 0.5$) e propensione ($0.5 \leq x \leq 1$) al rischio	-2,0385	4,0769	0,000045

Le cinque figure che seguono indicano che, quali che siano i dati simulati, la derivata seconda della funzione IPT assume comunque valori positivi prima e valori negativi poi. In altre parole

l'andamento della funzione stimata dipende non tanto da tali valori quanto dalle caratteristiche della forma funzionale della IPT.

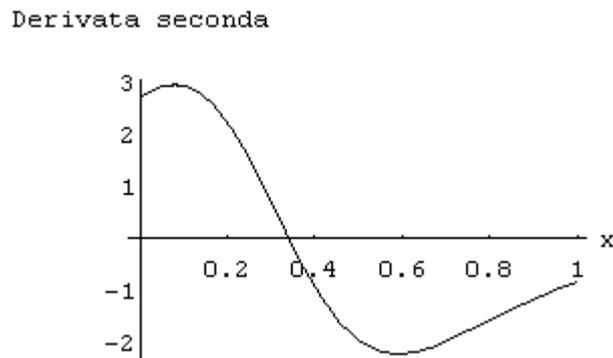


Fig. 11 Valori simulati di utilità che implicano avversione al rischio per $0 \leq x \leq 1$

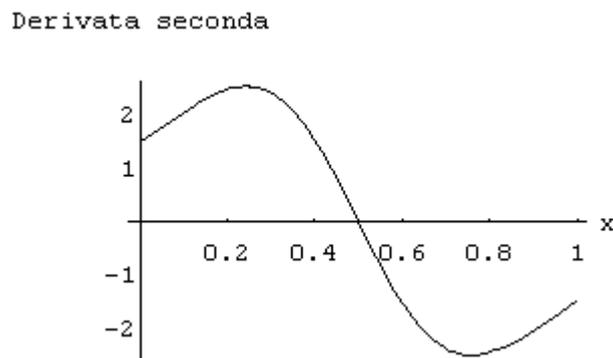


Fig. 12 Valori simulati di utilità che implicano neutralità al rischio per $0 \leq x \leq 1$

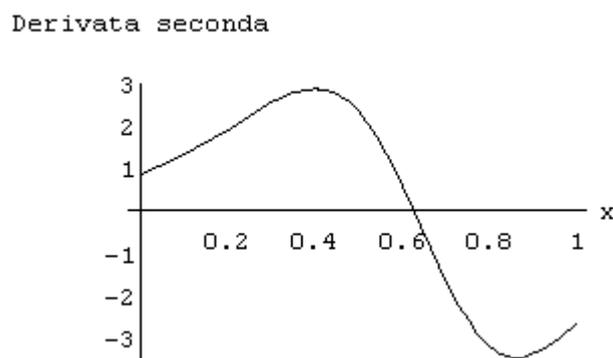


Fig. 13 Valori simulati di utilità che implicano propensione al rischio per $0 \leq x \leq 1$

Derivata seconda

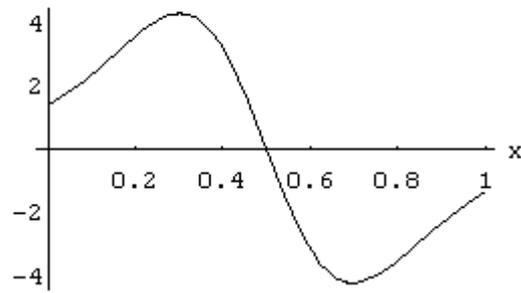


Fig. 14 Valori simulati di utilità che implicano propensione ($0 \leq x \leq 0.5$) e avversione ($0.5 \leq x \leq 1$) al rischio

Derivata seconda

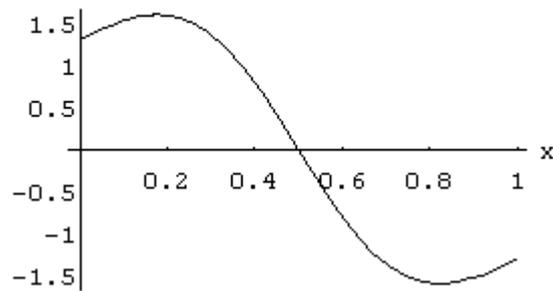


Fig. 14 Valori simulati di utilità che implicano avversione ($0 \leq x \leq 0.5$) e propensione ($0.5 \leq x \leq 1$) al rischio

BIBLIOGRAFIA

- ACRI (2002), *Settimo Rapporto sulle Fondazioni Bancarie*, Supplemento a *Il risparmio*, Edizione 2002, Roma.
- Bacci S. – Chiandotto B. (2002), *Struttura di preferenze e decisioni razionali nelle fondazioni bancarie*, in *Studi e Note di Economia*, n. 2, 2002, pagg. 19-56.
- Bacci S. – Chiandotto B. (2003), *Ancora sulla struttura di preferenze nelle fondazioni bancarie*, in *Studi e Note di Economia*, n. 3, 2003, pagg. 39-53.
- Fennema H. – Van Assen M. (1999), *Measuring the utility of losses by means of the trade-off method*, in *Journal of Risk and Uncertainty*, n.4.
- Niccoli A. (2003), *Avversi, neutrali o propensi al rischio?*, in *Studi e Note di Economia*, n. 2, 2003, pagg. 7-27.
- Pennings J.M.E. – Smidts A. (2003), *The shape of utility functions and organizational behavior*, in *Management Science*, vol. 49, pagg. 1251-1263.
- Pratt J. W. (1964), *Risk Aversion in the Small and in the Large*, in *Econometrica*, vol. 32, n.1-2.
- Smidts A. (1997), *The relationship between risk attitude and strength of preference: A test of intrinsic risk attitude*, in *Management Science*, vol. 43, pagg. 357-370.
- Von Neumann J. – Morgenstern O. (1953), *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, Princeton University Press.
- Wakker, P. - Deneffe D. (1996), *Eliciting von Neumann- Morgenstern Utilities when Probabilities Are Distorted or Unknown*, in *Management Science* 42, pagg. 1131-1150.