



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ANCONA  
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA

**LE OPZIONI ESOTICHE:  
PROBLEMI DI PRICING  
E COPERTURA**

CECILIA BENVENUTO

QUADERNI DI RICERCA n. 85

QUADERNI DI RICERCA

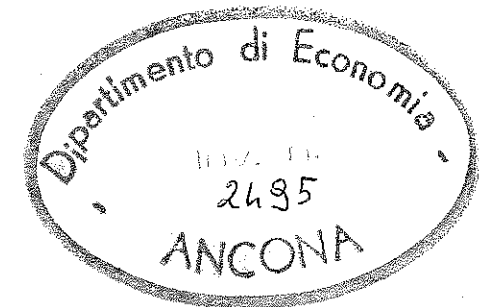


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ANCONA  
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA

**LE OPZIONI ESOTICHE:  
PROBLEMI DI PRICING  
E COPERTURA**

CECILIA BENVENUTO

QUADERNI DI RICERCA n. 85



ottobre 1996

**Comitato scientifico:**

*Pietro Alessandrini*

*Giuliano Conti*

*Marco Crivellini*

*Paolo Ercolani (coordinatore)*

Questo studio è frutto dell'attività di ricerca presso il Dipartimento di Economia di Ancona finanziata da una borsa di studio della Banca Popolare di Ancona.

Ringrazio il prof. Alessandrini ed il prof. Conti per l'attenzione dedicati, nonché il dott. Maurizio Lojacono (BANCA PROFILO), il dott. Corrado Pistarino (COMIT) ed il dott. Federico Vitto (IMI-SIGECO) per i preziosi suggerimenti.

**Le Opzioni Esotiche:  
Problemi di Pricing e Copertura**

di

Cecilia Benvenuto

**Sintesi**

In questo studio vengono analizzati in dettaglio i vari tipi di opzioni esotiche, suddivise in opzioni *path-independent* (il cui pay-off dipende solo dal prezzo dell'attività finanziaria sottostante a scadenza) ed opzioni *path-dependent* (il cui pay-off dipende dal sentiero percorso dal sottostante durante la vita dell'opzione), su attività quali titoli e valute.

La finalità è quella di fornire, quando possibile, un confronto tra *modalità di pricing e copertura* delle posizioni su opzioni esotiche *dinamiche*, à la Black-Scholes, e *statiche*, sempre più utilizzate dagli operatori.

La modalità statica di replica dell'esotica ha, infatti, il vantaggio di semplificare il procedimento di pricing (ottenuto sommando i prezzi delle opzioni componenti il portafoglio) e di copertura (che non richiede continui ribilanciamenti), agevolando, quindi, la diffusione di tali strumenti.

*Dipartimento di Economia-Università di Ancona  
Via Birarelli 11  
60121 Ancona  
Tel. 071-2203916*

## indice

<i>Introduzione</i>	1
<b>1 LE OPZIONI ESOTICHE</b>	3
1.1 <i>Definizione e Classificazioni</i>	3
1.2 <i>Problemi di Pricing e Copertura</i>	5
1.2.1 <i>Il Modello di Black-Scholes e la Valutazione Neutrale verso il Rischio</i>	5
1.2.2 <i>Il Modello Binomiale</i>	7
1.3 <i>I Portafogli di Replica e la Copertura Statica</i>	9
<b>2 LE OPZIONI IN CUI VENGONO ALTERATI ALCUNI TERMINI CONTRATTUALI</b>	11
2.1 <i>Le Opzioni Binarie o Digitali</i>	11
2.1.1 <i>Opzioni Cash-or-Nothing</i>	12
2.1.2 <i>Opzioni Asset-or-Nothing</i>	15
2.1.3 <i>Opzioni Gap</i>	18
2.1.4 <i>Opzioni Cash e Asset Supershares</i>	21
2.2 <i>Le Opzioni Pay-Later o Contingenti</i>	26
2.3 <i>Le Opzioni Forward-Start o Deferred-Start</i>	26
<b>3 LE OPZIONI PATH-DEPENDENT</b>	30
3.1 <i>Le Opzioni Chooser</i>	30
3.2 <i>Le Opzioni Barrier o Knock-in/Knock-Out</i>	33
3.3 <i>Le Opzioni Lookback</i>	58
3.4 <i>Le Opzioni Average o Asian</i>	62
<b>4 CONCLUSIONI</b>	70
<b>APPENDICE 1</b>	72
<b>APPENDICE 2</b>	76
<b>RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI</b>	79

## *Introduzione*

Negli ultimi decenni i contratti di opzione su attività finanziarie sono stati oggetto di un frenetico processo innovativo.

La loro versatilità ha permesso negli anni Ottanta la creazione di infinite strategie, costruite assemblando più contratti opzionari, in grado di soddisfare le più svariate esigenze di copertura e speculative.

Il vero fermento innovativo ha, però, prodotto i suoi frutti solamente negli anni Novanta, quando il mercato ha cominciato a trattare in modo sempre più consistente quella che viene definita la "*seconda generazione di opzioni*" o "*opzioni esotiche*".

Esse individuano una serie di contratti opzionari atipici, che, cioè, offrono all'acquirente, a scadenza o durante la vita dell'opzione, un pay-off diverso dalla semplice differenza tra prezzo dell'underlying e prezzo di esercizio (viceversa nel caso di opzione put).

Quando Goldman, Sosin e Gatto pubblicarono nel 1979 l'articolo "Path-Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High", disegnando i tratti delle opzioni lookback, nessuno poteva immaginare un effettivo utilizzo di tipologie opzionarie così utili ma altrettanto complesse.

Sebbene poco conosciuti alla letteratura tali strumenti sono oggi molto utilizzati da operatori quali grandi banche e società di gestione mobiliare, capaci di adoperarli per proprio conto e di rivenderli ad operatori creditizi di minori dimensioni.

Il presente lavoro ha la finalità di analizzare in dettaglio i vari tipi di opzioni esotiche, suddivise in opzioni *path-independent* (il cui pay-off dipende solo dal prezzo dell'attività finanziaria sottostante a scadenza) ed

opzioni *path-dependent* (il cui pay-off dipende dal sentiero percorso dal sottostante durante la vita dell'opzione), su attività quali titoli e valute, il cui pricing risulta più agevole (essendo possibile assumere un comportamento lognormale dei prezzi dell'attività finanziaria).

Lo studio delle modalità di pricing e copertura di tali strumenti ha incontrato, però, notevoli ostacoli, sia pratici che teorici.

I problemi pratici sono emersi per la raccolta di materiale sull'argomento: si tratta di derivati finanziari innovativi il cui patrimonio conoscitivo è ancora dominio esclusivo di pochi operatori capaci di utilizzarli.

E' stato, quindi, necessario un contatto diretto con questi ultimi, operanti tutti nell'area milanese, dal quale è emerso un bagaglio di riferimenti bibliografici ed esperienze operative in grado di rappresentare una solida base per uno studio approfondito sull'argomento.

Per ciò che riguarda i problemi teorici, essi sono legati, invece, alle difficoltà presenti nel predisporre strategie di pricing e copertura di strumenti finanziari che possiedono pay-off così complessi.

## 1 LE OPZIONI ESOTICHE

### 1.1 Definizione e Classificazioni

Il grande sviluppo dei contratti opzionari a partire dagli anni Ottanta è riconducibile alla loro eccezionale versatilità.

A differenza di altri derivati finanziari, infatti, le opzioni standard (plain vanilla) possono essere assemblate in una miriade di combinazioni alle quali fino a pochi anni fa veniva attribuito l'appellativo di "esotiche".

Attualmente, però, per opzioni esotiche si intende una serie di nuovi contratti opzionari in cui vengano alterate le tradizionali caratteristiche delle plain vanilla<sup>1</sup>.

Le opzioni esotiche<sup>2</sup> vengono acquistate da operatori che cercano di coprire le loro posizioni su attività finanziarie e da speculatori che vogliono trarre vantaggio da movimenti attesi dei prezzi a costi contenuti, mentre vengono vendute da intermediari finanziari che soddisfano la domanda dei loro clienti e da investitori che cercano redditi più alti dai loro portafogli.

Gli intermediari finanziari sono soprattutto grandi banche, società di gestione mobiliare e brokers, che guadagnano sullo spread tra prezzo applicato e costo per la copertura.

Al fine di rendere più agevole l'analisi delle opzioni esotiche possiamo raggrupparle in tre categorie principali<sup>3</sup>:

<sup>1</sup> Un'opzione è un contratto che conferisce all'acquirente il diritto, non accompagnato dall'obbligo, di acquistare (opzione call) o di vendere (opzione put) una determinata quantità di attività finanziaria ad un prezzo prestabilito (prezzo di esercizio) e ad una certa data (opzione europea) oppure entro una certa data (opzione americana) previo pagamento di un premio, che costituisce il prezzo dell'opzione.

<sup>2</sup> The Globecon Group LTD (1995).

<sup>3</sup> Galitz (1994).

- a) OPZIONI PATH-INDIPENDENT, in cui cioè il pay-off dipende solo dal prezzo dell'underlying a scadenza<sup>4</sup>, a cui VENGONO PARZIALMENTE ALTERATI ALCUNI TERMINI CONTRATTUALI, quali l'ammontare del pay-off (opzioni binarie o digitali), il pagamento del premio (opzioni pay-later o contingenti), la decorrenza del contratto (opzioni forward-start o deferred-start);
- b) OPZIONI PATH-DEPENDENT, in cui il pay-off dipende dalla dinamica del prezzo dell'attività finanziaria sottostante durante la vita dell'opzione e non solo alla scadenza; tra queste emergono per importanza le opzioni chooser, le opzioni barrier o knock-in/knock-out, le opzioni lookback e le opzioni asian o average.
- c) OPZIONI MULTI-FACTOR, in cui il pay-off dipende dai prezzi di due o più attività sottostanti, come nel caso delle opzioni exchange (in cui esso è pari alla differenza tra i prezzi di due attività sottostanti, consentendo, quindi, lo scambio a termine tra le due)<sup>5</sup>, delle opzioni rainbow (il cui pay-off è pari, nel caso di opzione call, alla differenza tra il prezzo più alto raggiunto tra due o più attività finanziarie sottostanti ed il prezzo di esercizio, e viceversa nel caso di opzione put)<sup>6</sup>, delle opzioni basket (in cui, invece, il pay-off dipende dalla media dei prezzi di più attività sottostanti, come nel caso delle opzioni su indici)<sup>7</sup>, delle opzioni quanto o currency-translated (in cui il prezzo dell'attività sottostante o il prezzo di esercizio sono denominati in valuta straniera)<sup>8</sup>.

<sup>4</sup> Ovviamente ciò avviene solo nella loro versione europea, mentre se sono americane, cioè esercitabili prima della scadenza, diventano anch'esse path-dependent.

<sup>5</sup> Sull'argomento Margrabe (1978); Rubinstein (1991a).

<sup>6</sup> Si veda Rubinstein (1991e).

<sup>7</sup> Grannis (1992); Dembo, Patel (1992).

<sup>8</sup> Per un approfondimento si veda Reiner (1992).

Quest'ultimo gruppo di opzioni non verranno trattate nel presente lavoro, poichè esse aggiungono ai normali problemi di valutazione delle opzioni esotiche una ulteriore difficoltà, legata alla stima della correlazione attesa tra due o più variabili finanziarie.

Se, infatti, è arduo stimare la volatilità di singoli prezzi, diventa molto più complicato cogliere la relazione che lega diverse variabili finanziarie.

## 1.2 Problemi di Pricing e Copertura

### 1.2.1 Il modello di Black-Scholes e la Valutazione Neutrale verso il Rischio

Il modello analitico di Black-Scholes e le sue successive estensioni<sup>9</sup> sono in grado di valutare il prezzo di una opzione europea standard attraverso un procedimento di replica dinamica: il venditore dell'opzione può costruire un portafoglio privo di rischio acquistando continuamente una quantità di attività finanziaria pari al  $\Delta$ <sup>10</sup>.

Finché il portafoglio ha  $\Delta = 0$  il rischio è nullo e quindi fornisce un rendimento certo pari al tasso di interesse privo di rischio.

<sup>9</sup> Black, Scholes (1973); Garman, Kohlhagen (1983); Merton (1976); Roll (1977); Whaley (1981). Sulle critiche e le revisioni del modello di Black-Scholes si veda Black (1992), Leong (1992b); Leong (1992a).

Per una panoramica su tutti i modelli di valutazione delle opzioni si veda Smithson (1991).

<sup>10</sup> Si definisce delta ( $\Delta$ ) dell'opzione il tasso di variazione del prezzo dell'opzione rispetto al prezzo dell'attività sottostante.

Ciò permette di derivare il valore delle opzioni call e put europee in un certo istante  $t$  attraverso una formula chiusa, che esprime il prezzo dell'opzione come funzione di più variabili input, ossia:

$$v = \phi S e^{-DT} N(\phi d_1) - \phi E e^{-RT} N(\phi d_2)$$

dove  $E$  indica il prezzo di esercizio,  $S$  il prezzo spot,  $\phi$  è una variabile binaria uguale ad 1 per la call ed a -1 per la put,  $N(x)$  è la funzione di probabilità cumulata della variabile normale standardizzata (ossia la probabilità che una variabile con distribuzione normale standardizzata  $Z(0,1)$  assuma un valore inferiore ad  $x$ ),

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(R - D + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(R - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

mentre  $\sigma$  è la volatilità del prezzo dell'attività sottostante, pari alla deviazione standard delle variazioni annuali dello stesso,  $R$  il tasso privo di rischio nazionale,  $D$  l'interesse corrisposto sull'attività sottostante e  $T$  la vita residua<sup>11</sup>.

Poichè nelle soluzioni compare solamente il tasso privo di rischio  $R$ , il premio opzionario non dipende dalle attitudini degli operatori nei confronti del rischio.

Tale ipotesi di neutralità rispetto al rischio, assieme all'ipotesi per la quale il prezzo dell'attività sottostante è distribuito in modo lognormale (cioè il logaritmo è distribuito in modo normale), ci permette di ottenere le stesse

<sup>11</sup> Wilmott, Dewynne, Howison (1993); Hull (1994); Koziol (1990); Castagnoli (1990).

formule in modo molto più semplice, ossia scontando il payoff atteso alla scadenza al tasso privo di rischio  $R$ <sup>12</sup>, come mostra l'Appendice 1.

Nel caso, però, delle opzioni esotiche, la maggiore complessità del pay-off rende tali formule più complesse rispetto a quelle standard e per alcune di esse, come le opzioni average aritmetiche, non è ancora disponibile una formula chiusa di valutazione.

A tali **problemi di pricing** si aggiungono per diverse tipologie di opzioni esotiche anche **problemi di copertura**: non solo, infatti, il  $\gamma$ <sup>13</sup> dell'opzione (o convessità del pay-off) impone continui ribilanciamenti, come nel caso delle plain vanilla, ma spesso la discontinuità del pay-off o l'inserimento di strutture "barrier" determinano improvvise variazioni del  $\Delta$ , con notevoli difficoltà di copertura<sup>14</sup>.

### 1.2.2 Il Modello Binomiale (CRR)

Ogni opzione può essere valutata utilizzando il modello binomiale elaborato da Cox, Ross e Rubinstein (CRR)<sup>15</sup> ed esposto nell'Appendice 2, ma il problema diventa più complesso nel caso delle opzioni esotiche path-dependent, poichè il loro valore dipende anche da una certa funzione  $F(t,S)$  del sentiero seguito dal prezzo del sottostante, quindi ogni singolo percorso del prezzo dell'underlying deve essere valutato singolarmente.

Nel caso di un'opzione standard il premio prescinde dal sentiero percorso, perchè il suo valore finale dipende solo dal prezzo dell'attività a scadenza,

<sup>12</sup> Sull'argomento Hull (1993); Rubinstein (1992b); Wilmott, Dewynne, Howison (1993).

<sup>13</sup> Si definisce *gamma* ( $\gamma$ ) dell'opzione il tasso di variazione del delta rispetto al prezzo dell'attività sottostante, ossia la convessità o curvatura del prezzo dell'opzione, pari alla derivata seconda del prezzo dell'opzione rispetto al prezzo dell'underlying.

<sup>14</sup> Pistarino.

<sup>15</sup> Anche se il modello binomiale è stato introdotto da Sharpe (1978), questo approccio viene spesso ricondotto a Cox, Ross, Rubinstein (1979).



quindi è possibile non considerare tutti i sentieri che determinano uno stesso prezzo (ad esempio  $S_{ud} = S_{du} = S$ ).

Poichè, invece, il prezzo di una opzione path dependent dipende dal percorso seguito dal prezzo prima della scadenza, occorre mantenere distinti tutti i possibili sentieri, con una esplosione delle dimensioni dell'albero binomiale, o comunque considerare ad ogni nodo tutti i diversi valori della funzione del sentiero percorso, incrementando notevolmente la quantità di dati da elaborare.

Come vedremo il problema si attenua nel caso in cui il numero di valori di  $F(t,S)$  ad ogni nodo non cresce velocemente con  $n$ , il numero degli intervalli (come avviene, invece, per le average, sebbene, anche in questo caso, siano possibili applicazioni del CRR con ipotesi semplificatrici), perchè, ad esempio,  $F(t,S)$  è rappresentata dal livello massimo (minimo) raggiunto dal prezzo fino a quel momento (opzioni lookback), che ad ogni nodo può assumere non più di  $n$  valori.

Nei casi in cui sia precluso l'utilizzo dei primi due approcci, è possibile ricorrere al metodo Monte-Carlo<sup>16</sup>, consistente nella simulazione di infiniti sentieri casuali seguiti dal prezzo dell'attività finanziaria sottostante, per valutare in ogni occasione il prezzo dell'opzione; la media di questi risultati può essere, infatti, utilizzata come stima del valore dell'opzione.

Esso risulta, però, abbastanza laborioso e non è applicabile alle opzioni esotiche americane.

<sup>16</sup> Boyle (1977).

### 1.3 I Portafogli di Replica e la Copertura Statica

Al fine di superare i problemi di pricing e copertura legati al procedimento di replica dinamica della posizione su opzioni esotiche sopra esposti, stanno assumendo sempre maggiore rilevanza le procedure di replica statica<sup>17</sup>.

Esse consistono nella possibilità di creare dei portafogli di replica statica della posizione su opzioni esotiche, scomponendo le varie tipologie di opzioni esotiche in un portafoglio di opzioni plain vanilla, con vari prezzi di esercizio e scadenze, che hanno lo stesso pay-off dell'opzione esotica in ogni momento futuro e per ogni livello di prezzo dell'attività sottostante.

Si comprende subito come tale approccio sia in grado di semplificare notevolmente l'utilizzo di queste nuove tipologie di contratti opzionari, riducendo i problemi di pricing e copertura.

In primo luogo, per ciò che riguarda il **pricing**, la replica statica permette di valutare facilmente l'opzione esotica come somma dei prezzi delle opzioni standard che la compongono.

In secondo luogo, per ciò che riguarda la **copertura**, la replica statica non richiede continui ribilanciamenti del portafoglio, che comportano costi di transazione e perdite legate alle variazioni sfavorevoli del prezzo dell'attività sottostante: il pay-off del portafoglio di replica è, infatti, costantemente uguale a quello dell'opzione esotica.

Quanto detto spiega come gli operatori, ed in particolare gli intermediari finanziari che offrono questo tipo di strumenti, fissino non dei "prezzi di equilibrio", ma dei "prezzi di arbitraggio".

Essi non sono, infatti, interessati a quale possa essere il prezzo di equilibrio del contratto opzionario atipico in una economia idealizzata retta da ipotesi

<sup>17</sup> Sull'argomento Derman, Kani (1993); Dupire (1993); Bowie, Carr (1994); Rubinstein (1991c).

irrealistiche, ma vogliono conoscere il prezzo della strategia di copertura al quale, maggiorato di uno spread, venderanno l'opzione esotica.

Naturalmente tale approccio non è ancora applicabile a tutte le tipologie di opzioni esotiche, sebbene possa essere utilizzato per la maggior parte di esse.

Nei prossimi capitoli verranno esaminati i vari tipi di opzioni esotiche, indicando in dettaglio le modalità di pricing e copertura dinamiche e statiche più indicate.

Come abbiamo già anticipato, verranno prese in considerazione le tipologie opzionarie europee e non americane, che aggiungerebbero solamente i problemi di valutazione delle opzioni americane plain vanilla.

## 2 LE OPZIONI IN CUI VENGONO ALTERATI ALCUNI TERMINI CONTRATTUALI

### 2.1 Le Opzioni Binarie o Digitali

A differenza delle opzioni standard le varie tipologie di opzioni binarie o digitali hanno pay-off discontinui, poichè passano da un livello ad un altro a seconda che il prezzo dell'attività sottostante soddisfi o meno una certa condizione<sup>1</sup>.

Tale discontinuità del pay-off permette, comunque, che il delta dell'opzione binaria, ossia la sensibilità del premio alle variazioni di prezzo del sottostante, sia continuo su tutto l'intervallo dei prezzi possibili e per tutta la durata dell'opzione, quindi sarebbe possibile una adeguata strategia di copertura.

Per valori di  $S$  vicini al prezzo di esercizio, però, il  $\Delta$  aumenta (in valore assoluto) in modo molto repentino e ciò può procurare molti problemi per la copertura, soprattutto negli ultimi istanti di vita dell'opzione.

Anche il parametro vega, ossia la sensibilità del premio alle variazioni della volatilità, può comportarsi in modo strano, come verrà illustrato nel caso delle opzioni cash-or-nothing.

Analizziamo ora in dettaglio le opzioni binarie<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Rubinstein, Reiner (1991b); Hudson (1991); Pistarino.

<sup>2</sup> Si noti che oltre alle tipologie standard di opzioni binarie, che verranno ora illustrate, esistono delle tipologie barrier che uniscono le caratteristiche delle opzioni digitali a quelle delle opzioni barrier. Per ulteriori approfondimenti M. Rubinstein, E. Reiner (1991b)

### 2.1.1 Opzioni Cash-or-Nothing

**Finalità per l'acquirente:** ottenere a scadenza un certo ammontare di liquidità per valori di  $S$  superiori o inferiori ad un certo livello.

L'opzione binaria call (put) più semplice ha un pay-off a scadenza nullo nel caso in cui il prezzo dell'underlying  $S_t$  sia inferiore (superiore) al prezzo di esercizio  $E$ , oppure pari ad un certo ammontare costante di liquidità  $X$  se il prezzo del sottostante è superiore (inferiore) al prezzo di esercizio, a prescindere da quanto l'opzione sia in-the-money.

Risulta, cioè:

$$\text{call: pay-off} \begin{cases} 0 & S_t \leq E \\ X & S_t > E \end{cases} \quad \text{put: pay-off} \begin{cases} X & S_t < E \\ 0 & S_t \geq E \end{cases}$$

Quanto detto può essere espresso attraverso il grafico 1.

CASH-OR-NOTHING CALL E PUT

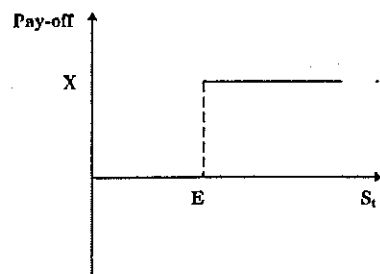
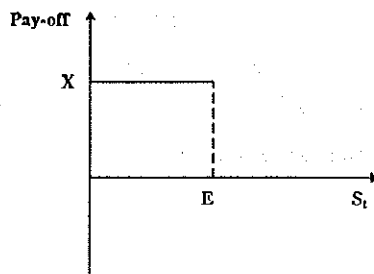


GRAFICO 1



### a) Replica dinamica

Volendo valutare l'opzione cash-or-nothing attraverso il modello di Black-Scholes è sufficiente ricordare che le formule di Black-Scholes possono essere scomposte in due termini: il valore attuale dell'attività finanziaria sottostante condizionato rispetto alla probabilità di esercizio dell'opzione ( $\phi S e^{-DT} N(\phi d_1)$ ) ed il valore attuale del prezzo di esercizio condizionato rispetto alla probabilità di esercizio dell'opzione neutrale rispetto al rischio ( $\phi E e^{-RT} N(\phi d_1 - \phi \sigma \sqrt{T})$ ).

Poichè in questo caso il pay-off è costituito solamente dall'ammontare di liquidità  $X$ , il valore di questa opzione "parziale" sarà dato dal solo secondo termine, in cui il pay-off è  $E = X$ , cioè:

$$v = \phi X e^{-RT} N(\phi d_1 - \phi \sigma \sqrt{T}) = \phi X e^{-RT} N(d_2)$$

con  $\phi$  variabile binaria uguale ad 1 per la call e a -1 per la put e

$$d_2 = \frac{\log \frac{S}{E} + \left( R - D - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}$$

Per analizzare il comportamento del parametro vega consideriamo una opzione cash-or-nothing call: se essa è at-the-money, per basse volatilità vega è positivo ma molto basso, mentre diventa negativo al crescere della volatilità; nel caso in cui essa sia in-the-money (out-of-the-money), per basse volatilità vega è negativo (positivo) e molto elevato, mentre tende a 0 per alte volatilità.

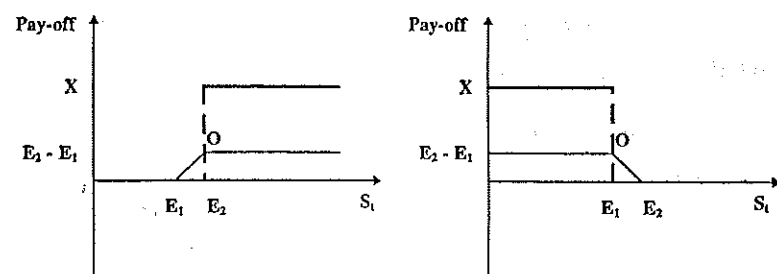
Ne deriva che chi acquista tale opzione (ma il ragionamento può essere applicato anche alle altre opzioni binarie) può essere anche vega negativo, se l'opzione è in-the-money o at-the-money, perchè, a differenza di una

opzione call standard, l'incremento della volatilità non aumenta la probabilità di un esercizio ancor più vantaggioso dell'opzione, ma accresce il rischio di perdita del pay-off.

### b) Replica statica

Considerando il profilo del pay-off dell'opzione cash-or-nothing call con prezzo di esercizio  $E_2$ , si coglie subito come esso sia simile a quello relativo allo spread call al rialzo in cui  $E_2$  tende ad  $E_1$ , come mostra il grafico 2<sup>3</sup>.

REPLICA CASH-OR-NOTHING CALL E PUT GRAFICO 2



In particolare l'opzione cash-or-nothing call può essere replicata attraverso  $\frac{X}{E_2 - E_1}$  spreads call al rialzo sul medesimo sottostante; si tratta, perciò, di acquistare  $\frac{X}{E_2 - E_1}$  call con prezzo di esercizio  $E_1$  e di rivenderle con prezzo di esercizio  $E_2$ .

<sup>3</sup> Sull'argomento Bowie, Carr, (1994).

Alla scadenza, infatti, se  $S_t < E_1$  il pay-off del portafoglio di replica sarà nullo come quello dell'esotica, mentre se  $E_1 < S_t < E_2$  esso comincerà ad aumentare per arrivare, in  $E_2$  e per valori superiori, ad  $X$ .

Come abbiamo detto  $E_2 - E_1$  deve tendere a 0 (o meglio deve essere il minimo dato che le opzioni sono quotate con prezzi di esercizio discreti), perchè tanto più è elevato e tanto più la strategia di replica è costosa (infatti le opzioni call sono acquistate con prezzo di esercizio inferiore), perchè garantisce maggiori profitti rispetto all'esotica (rappresentati dal triangolo  $E_1 E_2 O$ ).

Per gli operatori che effettuano una copertura statica, cioè vendono la cash-or-nothing call ed acquistano il portafoglio di replica, un aumento del costo di quest'ultimo comporterà un uguale aumento del prezzo a cui venderanno l'esotica (pari al primo maggiorato di uno spread) con il rischio di quotare prezzi non concorrenziali.

Un ragionamento analogo può essere applicato alla cash-or-nothing put considerando  $\frac{X}{E_2 - E_1}$  spreads put al ribasso, come mostra il grafico 2.

### 2.1.2 Opzioni Asset-or-Nothing

*Finalità per l'acquirente:* ottenere a scadenza l'attività sottostante senza costi aggiuntivi per valori di  $S_t$  superiori od inferiori ad un certo livello.

L'opzione asset-or-nothing call (put) ha un pay-off a scadenza nullo se il prezzo dell'underlying  $S_t$  è inferiore (superiore) al prezzo di esercizio  $E$ ,

oppure non determinato ma pari al prezzo dell'attività sottostante in quel momento se il prezzo è superiore (inferiore) allo strike price.

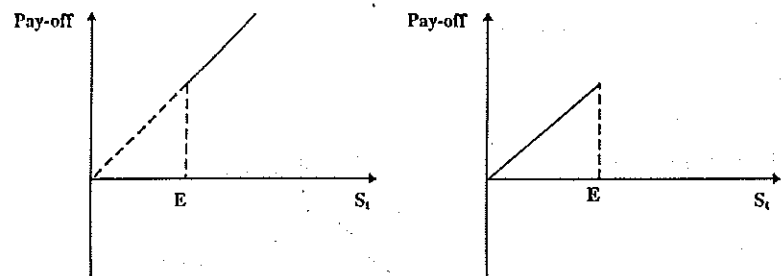
Risulta, cioè:

$$\text{call: pay-off} \begin{cases} 0 & S_t \leq E \\ S_t & S_t > E \end{cases} \quad \text{put: pay-off} \begin{cases} S_t & S_t < E \\ 0 & S_t \geq E \end{cases}$$

Si ottiene, quindi, il grafico 3.

### ASSET-OR-NOTHING CALL E PUT

GRAFICO 3



Si tratta ovviamente di opzioni molto costose perchè se sono esercitabili l'acquirente otterrà l'attività sottostante senza alcun pagamento ulteriore (si parla a tale proposito di "scommessa premio contro titolo").

#### a) Replica dinamica

Poichè in questo secondo caso il pay-off è costituito solo dal valore dell'attività sottostante alla scadenza, il valore di questa seconda opzione "parziale" sarà dato dal solo primo termine della formula di Black-Scholes, ossia:

$$v = \phi S e^{-DT} N(\phi d_1)$$

con

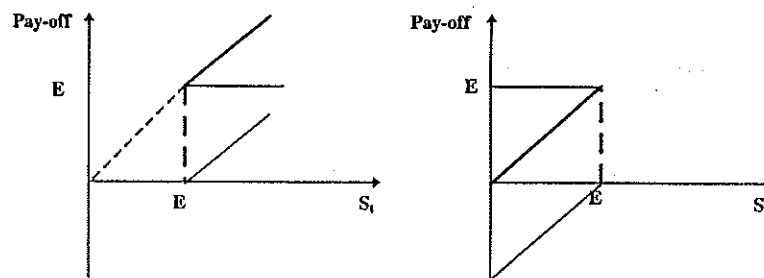
$$d_1 = \frac{\log \frac{S}{E} + \left( R - D + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}$$

#### b) Replica statica

Come mostra il grafico 4, il pay-off dell'opzione asset-or-nothing call può essere replicato attraverso l'acquisto di una opzione call sull'attività sottostante con prezzo di esercizio pari ad  $E$  e di  $\frac{E}{X}$  opzioni cash-or-nothing call con prezzo di esercizio  $E$  e pay-out  $X$  (che pagano, quindi, complessivamente una somma pari ad  $E$  per valori di  $S_t$  superiori o uguali ad  $E$ ).

### REPLICA ASSET-OR-NOTHING CALL E PUT

GRAFICO 4



Alla scadenza, infatti, se  $S_t \leq E$  entrambi i portafogli avranno pay-off nullo, mentre se  $S_t > E$  il portafoglio di replica avrà un pay-off pari a  $S_t - E + E = S_t$ .

Un ragionamento identico può essere applicato all'opzione asset-or-nothing put.

### 2.1.3 Opzioni gap

**Finalità per l'acquirente:** ottenere a scadenza, per valori di  $S_t$  superiori (inferiori) ad  $E$  un pay-off maggiore o minore della differenza  $S_t - E$  ( $E - S_t$ ).

L'opzione gap call (put) ha un pay-off a scadenza nullo se il prezzo dell'attività sottostante  $S_t$  è inferiore (superiore) al prezzo di esercizio  $E$ , oppure pari alla differenza tra il prezzo dell'underlyng ed un certo livello di prezzo  $X$  (o viceversa) se  $S_t$  è superiore (inferiore) ad  $E$ ;  $X$  viene, quindi, a sostituire lo strike price nel determinare il pay-off e la differenza tra  $X$  ed il prezzo strike prende il nome di *gap*.

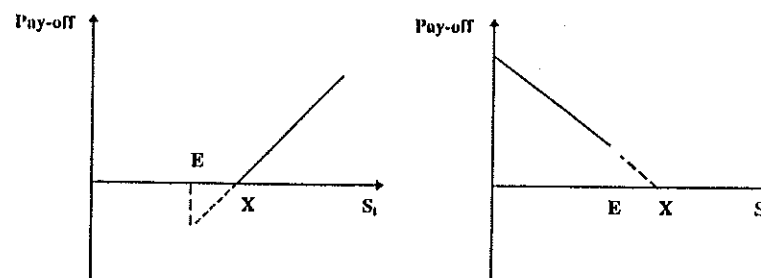
Si ha, quindi:

$$\text{call: pay-off} \begin{cases} 0 & S_t \leq E \\ S_t - X & S_t > E \end{cases} \quad \text{put: pay-off} \begin{cases} X - S_t & S_t < E \\ 0 & S_t \geq E \end{cases}$$

A seconda che il gap sia positivo o negativo si ottengono i grafici 5a e 5b.

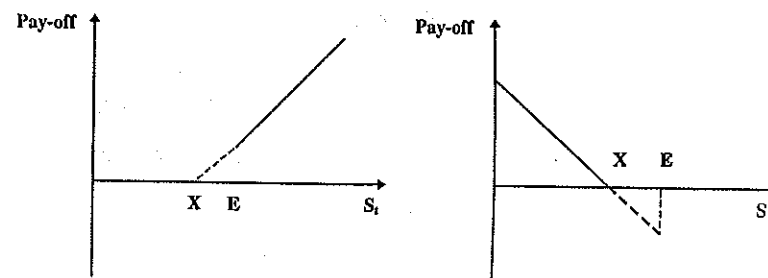
POSITIVE GAP CALL E PUT

GRAFICO 5a



NEGATIVE GAP CALL E PUT

GRAFICO 5b



Dai grafici emerge chiaramente che, nel caso di gap positivi, il valore della gap call è inferiore rispetto a quello di una opzione standard e viceversa per la gap put; per i gap negativi, invece, avviene l'inverso.

a) *Replica dinamica*

Poichè, come vedremo, il pay-off di una opzione gap può essere derivato sottraendo una opzione cash-or-nothing da una opzione asset-or-nothing, il valore di questo contratto atipico sarà pari a:

$$v = \phi S e^{-DT} N(\phi d_1) - \phi X e^{-RT} N(\phi d_2)$$

con

$$d_1 = \frac{\log \frac{S}{E} + \left( R - D + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \quad d_2 = \frac{\log \frac{S}{E} + \left( R - D - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}$$

quasi identica alla formula originale di Black-Scholes.

b) *Replica statica*

Come mostra il grafico 6, i profili dei pay-off delle opzioni positive e negative call possono essere replicati attraverso l'acquisto di una opzione asset-or-nothing call sull'attività sottostante con strike  $E$  e la vendita di una opzione cash-or nothing call sempre sul medesimo underlying, con strike  $E$  e pay-off  $X$ <sup>4</sup>.

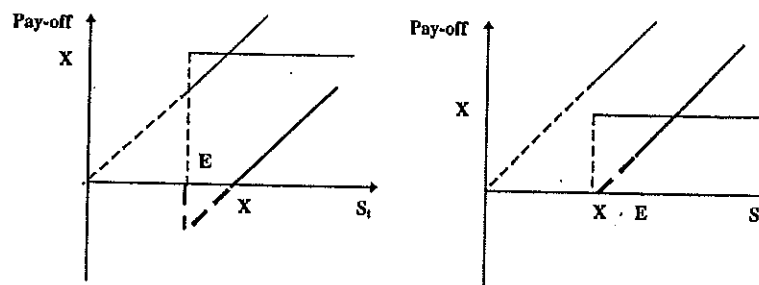
Alla scadenza, infatti, se  $S_t < E$  entrambe le strategie avranno valore nullo, mentre se  $S_t \geq E$  il portafoglio di replica avrà come pay-off  $S_t - X$  come l'opzione esotica.

Un ragionamento analogo può essere applicato alle opzioni positive e negative gap put.

<sup>4</sup> Per maggiore chiarezza in questo grafico abbiamo rappresentato il pay-off relativo all'acquisto e non alla vendita di una opzione cash-or-nothing call, che, quindi va sottratto dall'altro e non sommato.

REPLICA POSITIVE E NEGATIVE GAP CALL

GRAFICO 6



3.1.4 Opzioni cash e asset supershares

**Finalità per l'acquirente:** ottenere a scadenza un ammontare di liquidità per valori di  $S_t$  interni ad un certo intervallo.

Le opzioni cash o asset supershare hanno un pay-off a scadenza nullo se il prezzo dell'attività sottostante  $S_t$  è esterno ad un certo intervallo  $E_1 E_2$ , oppure pari ad un ammontare di liquidità se il prezzo dell'underlying a scadenza è interno a tale corridoio.

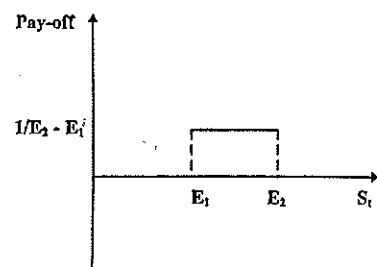
In particolare le opzioni *cash supershares* pagano una somma fissa dipendente dall'ampiezza dell'intervallo, pari a  $\frac{1}{E_2 - E_1}$ , mentre le opzioni

opzioni *asset supershares* pagano una somma non predeterminata dipendente da un estremo dell'intervallo, pari a  $\frac{S_t}{E_1}$ , cioè:

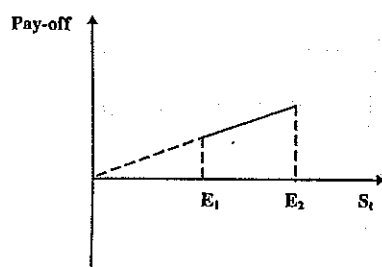
$$\text{call: pay-off} \begin{cases} 0 & S_t < E_1 \\ \frac{1}{E_2 - E_1} & E_1 \leq S_t < E_2 \\ 0 & S_t \geq E_2 \end{cases} \quad \text{put pay-off} \begin{cases} 0 & S_t < E_1 \\ \frac{S_t}{E_1} & E_1 \leq S_t < E_2 \\ 0 & S_t \geq E_2 \end{cases}$$

Ciò può essere espresso attraverso il grafico 7.

#### CASH E ASSET SUPERSHARE



#### GRAFICO 7



#### a) Replica dinamica

Come vedremo di seguito, poiché il pay-off di una cash supershare può essere replicato acquistando uno spread al rialzo di cash-or-nothing call sull'attività sottostante con  $X = \frac{1}{E_2 - E_1}$ , dove la cash-or-nothing call

acquistata ha prezzo di esercizio  $E_1$  e quella venduta ha prezzo di esercizio  $E_2$ , il valore della cash supershare è pari a:

$$v = X e^{-RT} [N(d_{2a}) - N(d_{2b})]$$

con

$$d_{2a} = \frac{\log \frac{S}{E_1} + \left(R - D - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma \sqrt{T}} \quad d_{2b} = \frac{\log \frac{S}{E_2} + \left(R - D - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma \sqrt{T}}$$

Allo stesso modo anche il pay-off di una asset supershare può essere replicato acquistando  $\frac{1}{E_1}$  spreads al rialzo di asset-or-nothing call sull'attività sottostante (anche in questo caso l'asset-or-nothing call acquistata ha strike  $E_1$ , mentre quella venduta  $E_2$ ), quindi il suo valore è:

$$v = \frac{1}{E_1} S e^{-DT} [N(d_{1a}) - N(d_{1b})]$$

con

$$d_{1a} = \frac{\log \frac{S}{E_1} + \left(R - D + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma \sqrt{T}} \quad d_{1b} = \frac{\log \frac{S}{E_2} + \left(R - D + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma \sqrt{T}}$$

#### b) Replica statica

Dal grafico 8 si comprende subito come il pay-off dell'opzione cash-supershare sia identico a quello di uno spread al rialzo di cash-or-nothing call sull'attività sottostante, ossia a quello relativo all'acquisto di una cash-



or-nothing call con strike  $E_1$  e alla vendita di una analoga opzione con strike

$$E_2, \text{ entrambe con pay-off } X = \frac{1}{E_2 - E_1}.$$

Alla scadenza se il prezzo dell'underlying sarà inferiore ad  $E_1$  entrambe le strategie scadranno senza valore, se  $E_1 < S_t < E_2$  il pay-off del portafoglio

di replica sarà pari ad  $\frac{1}{E_2 - E_1}$  come quello dell'esotica, mentre per

$$S_t > E_2 \text{ entrambi saranno pari a } \frac{1}{E_2 - E_1} - \frac{1}{E_2 - E_1} = 0.$$

Allo stesso modo una opzione asset supershare può essere replicata con  $\frac{1}{E_1}$

bullish spreads di asset-or-nothing call sull'attività sottostante, cioè con

l'acquisto di  $\frac{1}{E_1}$  asset-or nothing call con prezzo di esercizio  $E_1$  rivendute

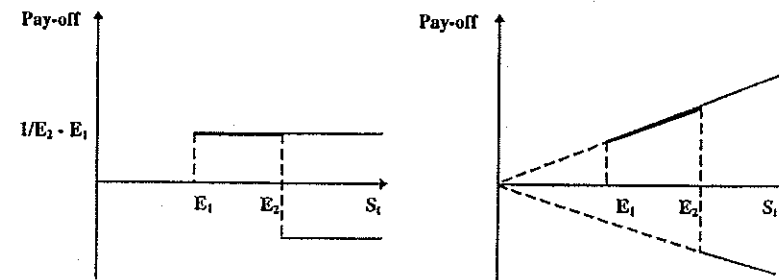
con strike  $E_2$ .

Se, infatti, il prezzo è inferiore ad  $E_1$  entrambi i portafogli valgono 0, nel caso in cui il prezzo sia interno al corridoio il pay-off di entrambi è pari ad

$$\frac{1}{E_1} S_t, \text{ mentre, per valori di } S_t \text{ superiori, esso è pari ad } \frac{1}{E_1} S_t - \frac{1}{E_1} S_t = 0.$$

## REPLICA CASH E ASSET SUPERSHARES

## GRAFICO 8



I pay-off delle opzioni binarie, in particolare delle cash-or-nothing e delle asset-or-nothing, possono essere agevolmente utilizzati per replicare qualsiasi profilo lineare discontinuo di profitti desiderato.

### 2.2 Le Opzioni Pay-Later o Contingenti

**Finalità per l'acquirente:** pagare il premio dell'opzione a scadenza e solo in caso di effettivo esercizio dell'opzione.

Come mostra il grafico 9, l'opzione pay-later call (put)<sup>5</sup> consiste in una opzione positive gap call (negative gap put) con pay-off  $S - X$  ( $X - S$ ) per  $S_t > E$  ( $S_t < E$ ) scomponibile nell'acquisto di una asset-or-nothing call (put) e nella vendita di una cash-or-nothing call (put) con pay-off  $X$ ,

<sup>5</sup> Turnbull (1992).

cui tale pay-off viene scelto in modo tale da rendere nullo il premio pagato alla stipula (dato dalla differenza tra il premio dell'asset e quello della cash). Poichè, infatti, viene imposto l'esercizio dell'opzione quando questa è in the money, ossia  $S_t > E$  ( $S_t < E$ ), seppure il pay-off non sia ancora positivo, il premio viene pagato dall'acquirente alla scadenza se e soltanto se l'opzione è in the money.

Per ciò che riguarda la replica dinamica e statica valgono, quindi, le stesse considerazioni fatte per le opzioni gap.

### 2.3 Le Opzioni Forward-Start o Deferred-Start

**Finalità per l'acquirente:** stipulare un contratto di opzione standard beneficiando di condizioni attuali vantaggiose (ad esempio  $\sigma$  o  $R$ ), ma anche di prezzi favorevoli dell'underlying dopo un certo tempo  $t$ .

PAY-LATER CALL E PUT

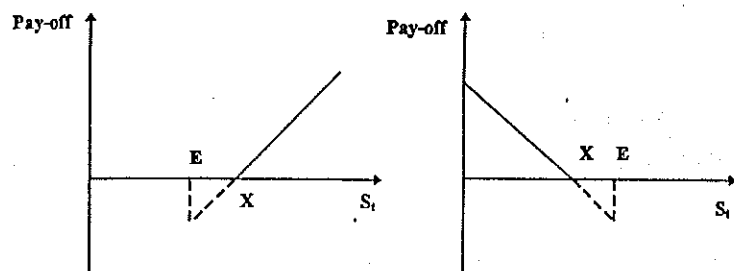


GRAFICO 9

L'opzione forward-start call (put) è una opzione che conferisce il diritto di ricevere dopo un periodo  $t$  (data di consegna) una opzione standard call (put) at-the-money con durata  $T$  (pari alla differenza tra la scadenza dell'opzione forward-start e la data di consegna) senza costi aggiuntivi<sup>6</sup>.

#### a) Replica dinamica

Poichè, come vedremo, l'opzione forward-start ha lo stesso valore di  $e^{-Dt}$  opzioni standard at-the-money con durata  $T$ , il suo valore potrà essere ricavato utilizzando la formula:

$$v = e^{-Dt} [\phi S e^{-DT} N(\phi d_1) - \phi E^{-RT} N(\phi d_2)]$$

#### b) Replica statica

Se si fanno le assunzioni relative ai seguenti elementi:

- 1) OMOGENEITA' DI PRIMO GRADO, ossia variazioni percentuali del prezzo dell'attività sottostante e del prezzo di esercizio determinano pari variazioni nel valore dell'opzione;
- 2) VARIABILI STATISTICHE, ossia solamente il prezzo dell'attività sottostante dopo il periodo  $t$  è incerto;
- 3) INVARIANZA di DATA, ossia le variabili che determinano il valore dell'opzione non dipendono dalle date di rilevamento ma solo dalle differenze di tempo relative;
- 4) PAY-OUT, ossia l'attività sottostante produce un flusso di liquidità pari a  $D$ ;

è possibile replicare facilmente l'opzione forward-start.

<sup>6</sup> Rubinstein (1991d).

Indicando con  $V(X, Y, T)$  il valore di una opzione standard con prezzo corrente dell'underlying  $X$ , prezzo di esercizio  $Y$  e durata  $T$ , il valore alla data di consegna di una opzione at-the-money con vita residua  $T$  sarà  $V(S_t, S_t, T)$ , che per l'ipotesi di omogeneità può essere scritto come:

$$V(S_t, S_t, T) = S_t V(1, 1, T).$$

Dall'ipotesi di invarianza di data si desume la non necessità di specificare alcuna data, mentre dall'ipotesi relativa alle variabili statistiche emerge che  $V(1, 1, T)$  è un valore certo.

Poichè questo ammontare è il costo alla data di consegna dell'opzione standard a cui dà diritto la forward-start, il valore corrente di quest'ultimo coincide con il prezzo dell'esotica.

Interpretando la quantità certa  $V(1, 1, T)$  come il numero di unità dell'attività sottostante, il valore corrente dell'opzione forward-start, considerando l'assunzione relativa al pay-out, è:

$$Se^{-D_t} V(1, 1, T)$$

che riapplicando l'ipotesi di omogeneità diventa:

$$e^{-D_t} V(S, S, T).$$

Emerge, quindi, come una forward-start option possa essere replicata con  $e^{-D_t}$  opzioni standard, at-the-money al momento della stipula, con durata  $T$  (pari alla differenza tra la scadenza dell'opzione forward-start e la data di consegna).

Nel caso in cui non vi siano dividendi, poichè:

$$V(S_t, S_t, T) = S_t V(1, 1, T)$$

è sufficiente acquistare un ammontare pari a  $V(1, 1, T)$  unità dell'attività sottostante che dopo il periodo  $t$  avrà valore  $S_t V(1, 1, T)$ .

è sufficiente acquistare un ammontare pari a  $V(1, 1, T)$  unità dell'attività sottostante che dopo il periodo  $t$  avrà valore  $S_t V(1, 1, T)$ .

Definendo l'*opzione compound* call (put) come una opzione esotica che conferisce il diritto di acquistare (vendere) dopo un periodo  $t$  una opzione standard call o put (con strike e durata determinati) ad un certo prezzo prefissato<sup>7</sup>, si può vedere l'opzione forward-start come una opzione compound call su call o put su put semplificata, in cui, cioè, il prezzo di esercizio dell'opzione compound è nullo (poichè non è richiesto alcun pagamento aggiuntivo), mentre il prezzo di esercizio dell'opzione sottostante non è determinato, ma pari al prezzo spot del sottostante dopo il tempo  $t$ .

<sup>7</sup> Si tratta, quindi, di una opzione in cui l'attività sottostante è ancora una opzione. Tale tipologia di opzione esotica non è stata analizzata in dettaglio perchè non esiste ancora un portafoglio di replica e l'equazione di Black-Scholes che la valuta utilizza delle funzioni normali bivariate ed un coefficiente di correlazione tra due variabili casuali. Sull'argomento Rubinstein (1992a).

### 3 LE OPZIONI PATH-DEPENDENT

#### 3.1 Le Opzioni Chooser

*Finalità per l'acquirente:* poter scegliere, dopo un certo tempo  $t$  della vita dell'opzione, se essa debba essere una call o una put, a seconda della maggiore convenienza.

L'opzione chooser è una opzione acquistata nel presente ma con la possibilità per l'acquirente, dopo un periodo  $t$ , di scegliere se l'opzione sia una standard call o una standard put, sempre con prezzo di esercizio  $E$  e vita residua  $T - t$ <sup>1</sup>.

Si comprende, quindi, come il pay-off dell'opzione chooser a scadenza dipenda dalla dinamica del prezzo del sottostante durante la vita dell'opzione (cioè l'opzione sia path-dependent), sulla base della quale l'acquirente sceglie tra call e put.

Il pay-off di questa opzione esotica può essere, quindi, scritto come:

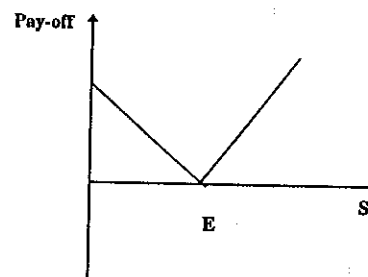
$$\max [c(E, T-t), p(E, T-t) \text{ dopo il tempo } t]$$

ottenendo il grafico 10, molto simile a quello relativo ad uno straddle, ma come dimostreremo, questo contratto è molto più economico rispetto ad esso e più costoso rispetto all'acquisto di una semplice call o put.

<sup>1</sup> Nel caso in cui lo strike o la durata della call e della put non siano uguali, si parla di opzioni chooser complesse. Per ulteriori approfondimenti si veda Rubinstein (1991b).

### OPZIONE CHOOSER

### GRAFICO 10



#### a) Replica dinamica

Poiché dimostreremo che l'opzione chooser è equivalente ad un portafoglio costituito da una opzione call sulla stessa attività sottostante con strike price  $E$  e durata  $T$ , ed  $e^{-D(T-t)}$  opzioni put, sempre sulla stessa attività sottostante, con prezzo di esercizio  $Ee^{-R(T-t)}$  e durata  $t$ , essa ha valore:

$$v = Se^{-DT}N(d_1) - Ee^{-RT}N(d_2) - Se^{-D(T-t)}e^{-Dt}N(-e_1) + Ee^{-R(T-t)}e^{-Rt}N(-e_2)$$

$$\Rightarrow v = Se^{-DT}N(d_1) - Ee^{-RT}N(d_2) - Se^{-DT}N(-e_1) + Ee^{-RT}N(-e_2)$$

con

$$d_1 = \frac{\log \frac{S}{E} + \left( R - D + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \quad d_2 = \frac{\log \frac{S}{E} + \left( R - D - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$e_1 = \frac{\log \frac{S e^{-D(T-t)}}{E e^{-R(T-t)}} + \left( R - D + \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}}$$

$$e_2 = \frac{\log \frac{S e^{-D(T-t)}}{E e^{-R(T-t)}} + \left( R - D - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}{\sigma \sqrt{t}}$$

### b) Replica statica

Per valutare una opzione chooser con pay-off:

$$\max [c(E, T-t), p(E, T-t) \text{ dopo il tempo } t]$$

è sufficiente utilizzare la put-call parity, per la quale si ha:

$$p = c + E e^{-R\tau} - S e^{-D\tau}$$

in cui l'opzione call e put hanno uguale prezzo di esercizio  $E$ , vita residua  $\tau$  e prezzo corrente dell'underlying  $S$ .

Il pay-off dell'opzione chooser può, infatti, essere scritto come:

$$\max [c(E, T-t), c(E, T-t) + E e^{-R(T-t)} - S^* e^{-D(T-t)} \text{ dopo il tempo } t]$$

in cui  $S^*$  è il prezzo dell'underlying dopo un periodo  $t$ , ossia:

$$c(E, T \text{ al tempo } 0) + \max [0, E e^{-R(T-t)} - S^* e^{-D(T-t)} \text{ dopo il tempo } t]$$

Considerando la seconda parte del pay-off come il valore finale di una put dopo  $t$ , si dimostra che l'opzione chooser può essere replicata acquistando:

- 1) una opzione call sulla stessa attività sottostante con prezzo di esercizio  $E$  e durata  $T$ ;

- 2)  $e^{-D(T-t)}$  opzioni put, sempre sulla stessa attività sottostante, con prezzo di esercizio  $E e^{-R(T-t)}$  e durata  $t$ <sup>2</sup>.

Da quanto detto emerge chiaramente come il prezzo di una chooser sia superiore rispetto a quello di una semplice call o put, ma inferiore rispetto al prezzo di uno straddle (si devono, infatti, acquistare meno put, con durata inferiore e prezzo di esercizio più basso), poichè, in questo caso l'acquirente deve decidere dopo il periodo  $t$  se sia più conveniente l'opzione call o put, senza poter aspettare la scadenza.

### 3.2 Le Opzioni Barrier o Knock-in Knock-Out

**Finalità per l'acquirente:** ottenere una protezione contro movimenti sfavorevoli di prezzo o scommettere su andamenti futuri di prezzo ad un costo più contenuto rispetto a quello delle plain vanilla, seppure con rischi più elevati, dovuti alla possibilità di non esistenza dell'opzione a scadenza.

Le opzioni barrier<sup>3</sup> consistono in opzioni call e put plain vanilla europee<sup>4</sup> che vengono in esistenza (*knock-in* call e put) o cessano di esistere (*knock-out* call e put) quando il prezzo del sottostante durante la vita dell'opzione tocca, anche per un solo istante, un certo livello *barriera* dal basso o dall'alto.

<sup>2</sup> Il pay-off di una chooser poteva essere alternativamente scomposto nell'acquisto di una opzione put con strike price  $E$  e durata  $T$  e di  $e^{-D(T-t)}$  opzioni call con prezzo di esercizio  $E e^{-R(T-t)}$  e durata  $t$ .

<sup>3</sup> Sull'argomento Pitarino; Goldman Sachs (1993); Dupire (1992); Benson, Daniel (1992); Hudson (1992).

<sup>4</sup> Sono comunque possibili opzioni barrier americane, seppure poco utilizzate, oppure l'opzione sottostante può non essere una opzione standard, ma un'altra opzione esotica, ad esempio l'opzione binaria.

In particolare le barrier possono cominciare ad esistere quando il prezzo dell'underlying scende fino a toccare la barriera (down-and-in call e put) o cresce fino ad essa (up-and-in call e put), oppure possono interrompere la loro esistenza quando il prezzo del sottostante decresce fino a toccare la barriera (down-and-out call e put) o cresce fino ad essa (up-and-out call e put).

Solitamente, però, la barriera è posta nella regione in cui l'opzione è out-of-the-money, cioè, nel caso delle opzioni call, la barriera si trova al di sotto del prezzo di esercizio (e del prezzo corrente del sottostante), mentre, nel caso di opzioni put, essa si trova al di sopra dello strike price (e del prezzo spot), quindi le tipologie più diffuse di barrier sono le opzioni down-and-in call e down-and-out call e le opzioni up-and-in put e up-and-out put. È importante notare che, poiché l'acquirente della barrier rischia di non poter usufruire dell'opzione a scadenza, il suo costo sarà più contenuto<sup>5</sup>; per questa ragione è possibile che venga previsto il pagamento di una somma prefissata (*rebate*) in caso di non esistenza dell'opzione a scadenza (per le opzioni knock-in quando la barriera non è stata toccata e viceversa per le opzioni knock-out).

<sup>5</sup> A differenza delle opzioni standard il premio di una knock-out diminuisce all'aumentare della volatilità, cioè è vega negativo, perché aumenta la probabilità di non esistenza dell'opzione; il premio di una knock-in, invece, è vega positivo, perché un aumento della volatilità aumenta la probabilità di diventare in.

Per le stesse ragioni le opzioni knock-out sono theta positive, ossia il loro valore aumenta col passare del tempo, mentre le opzioni knock-in sono theta negative, ossia il loro valore si riduce avvicinandosi alla scadenza, a meno che non si siano già trasformate in opzioni standard toccando la barriera.

Analizziamo ora in dettaglio le varie tipologie di opzioni barrier, derivando per ognuna la formula di valutazione ottenuta attraverso la *replica dinamica*<sup>5</sup>.

#### A) KNOCK-IN BARRIER

##### 1) DOWN-AND-IN CALL

Consiste in una opzione call che viene in esistenza solo se il prezzo del sottostante  $S$  scende fino a toccare, almeno per un istante, la barriera  $H$  (quindi  $S > H$ ).

Il pay-off di questa opzione sarà, quindi:

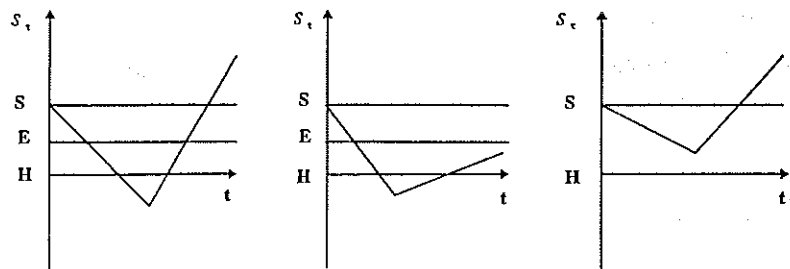
$$\text{pay-off} \begin{cases} \max(0, S_t - E) & \text{se } S_t \leq H \text{ per qualche } \tau \leq t \\ R & \text{se } S_t > H \text{ per ogni } \tau \leq t \end{cases}$$

dove  $S_t$  è il prezzo del sottostante a scadenza,  $S_\tau$  è il prezzo ad un tempo  $\tau$  precedente alla scadenza  $t$  ed  $R$  è il rebate.

In particolare se lo strike  $E$  è maggiore della barriera  $H$ , si possono ottenere i casi mostrati nella pagina seguente.

Il valore di una opzione down-and-in call in questo caso sarà pari al pay-off atteso scontato al tasso privo di rischio  $R$ , quindi, alla somma di due valori attuali: il primo relativo alla differenza  $S_t - E$  moltiplicata per la probabilità che il prezzo dell'underlying scenda a toccare la barriera ma a scadenza risalga oltre essa superando il prezzo di esercizio (3), ed il secondo relativo al rebate moltiplicato per la probabilità che il prezzo del

<sup>5</sup> Rubinstein, Reiner (1991a).



$S_\tau \leq H; S_t > E$   
pay-off  $S_t - E$

$S_\tau \leq H; S_t < E$   
pay-off 0

$S_\tau > H$  per ogni  $\tau \leq t$   
pay-off R

sottostante sia superiore ad  $H$  a scadenza e non sia mai sceso al di sotto di essa (5).

A tal fine ricordiamo che  $f(u)$  è la funzione di densità della variabile

casuale normale  $\log \frac{S_t}{S}$ , pari a:

$$f(u) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2}v^2}$$

$$\text{con } v = \frac{u - \mu T}{\sigma \sqrt{T}} \text{ e } \mu = R - D - \frac{\sigma^2}{2};$$

definiamo, inoltre, con  $g(u)$  la funzione di densità della variabile casuale

$\log \frac{S_t}{S}$  condizionata al fatto che essa scenda (salga) a toccare la barriera,

ma a scadenza termini al di sopra (al di sotto) di essa, pari a:

$$g(u) = e^{\frac{2\mu\alpha}{\sigma^2}} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2}v^2}$$

$$\text{con } v = \frac{u - \eta (2\alpha + \mu T)}{\sigma \sqrt{T}}, \quad \alpha = \log \frac{H}{S}, \text{ cioè pari alla funzione di}$$

densità normale premoltiplicata per  $e^{\frac{2\mu\alpha}{\sigma^2}}$ , con  $\eta = 1$  ( $\eta = -1$ ).

I due termini di cui sopra possono, quindi, essere espressi come:

$$(3) = e^{-RT} \int_{\log \frac{E}{S}}^{\eta \infty} \phi (Se^u - E) g(u) du = \\ = \phi Se^{-DT} \left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda} N(\eta y) - \phi Ee^{-RT} \left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda-2} N(\eta y - \eta \sigma \sqrt{T})$$

$$(5) = \text{Re}^{-RT} \int_{\log \frac{H}{S}}^{\eta \infty} [f(u) - g(u)] du = \\ = \text{Re}^{-RT} \left[ N(\eta x_1 - \eta \sigma \sqrt{T}) - \left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda-2} N(\eta y_1 - \eta \sigma \sqrt{T}) \right]$$

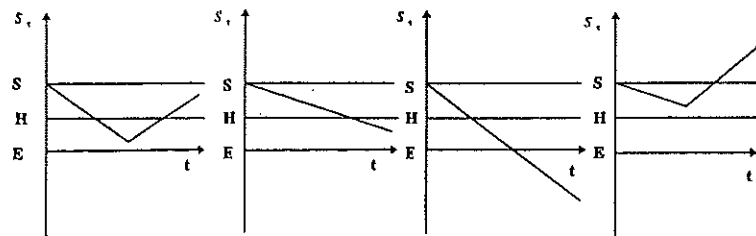
con  $\phi = 1, \eta = 1$ ,

$$x_1 = \frac{\log \frac{S}{H}}{\sigma \sqrt{T}} + \lambda \sigma \sqrt{T}, y = \frac{\log \frac{H^2}{SE}}{\sigma \sqrt{T}} + \lambda \sigma \sqrt{T}, y_1 = \frac{\log \frac{H}{S}}{\sigma \sqrt{T}} + \lambda \sigma \sqrt{T}, \lambda = 1 + \frac{\mu}{\sigma^2}$$

Il valore della down-and-in call sarà pari, perciò, a:

$$c_{di(B>H)} = (3) + (5) \quad (\phi = 1, \eta = 1).$$

Se, invece, lo strike  $E$  è minore della barriera  $H$  si ottengono i quattro casi:



$S_t \leq H; S_t > H$   
pay-off  $S_t - E$

$S_t \leq H; S_t > E$   
pay-off  $S_t - E$

$S_t \leq E$   
pay-off 0

$S_t > H$  per ogni  $\tau \leq t$   
pay-off R

In questo secondo caso il premio della down-and-in call sarà dato dalla somma di tre valori attuali: il primo relativo al pay-off  $S_t - E$  per la probabilità che il prezzo del sottostante scenda fino ad  $H$  e poi risalga oltre la stessa barriera (4) (corrispondente al termine (3) ma con l'estremo inferiore dell'integrale pari a  $\log \frac{H}{S}$  e non  $\log \frac{E}{S}$ ); il secondo, relativo sempre alla differenza  $S_t - E$ , ma per la probabilità che  $S_t$  sia inferiore ad  $H$  ma superiore ad  $E$ , ottenuto come differenza tra due termini, ossia  $S_t - E$  per la probabilità che  $S_t$  sia superiore ad  $E$  (1)<sup>6</sup> ed  $S_t - E$  per la probabilità che  $S_t$  sia superiore ad  $H$  (2); l'ultimo, relativo al rebate, identico al termine (5).

Si avrà, quindi:

<sup>6</sup> Tale termine è identico all'equazione standard di Black-Scholes.

$$(4) = e^{-RT} \int_{\log \frac{H}{S}}^{\eta \infty} \phi (Se^u - E) g(u) du =$$

$$= \phi Se^{-DT} \left( \frac{H}{S} \right)^{2\lambda} N(\eta y_1) - \phi Ee^{-RT} \left( \frac{H}{S} \right)^{2\lambda-2} N(\eta y_1 - \eta \sigma \sqrt{T})$$

$$(1) = e^{-RT} \int_{\log \frac{E}{S}}^{\phi \infty} \phi (Se^u - E) f(u) du =$$

$$= \phi Se^{-DT} N(\phi x) - \phi Ee^{-RT} N(\phi x - \phi \sigma \sqrt{T})$$

$$(2) = e^{-RT} \int_{\log \frac{H}{S}}^{\phi \infty} \phi (Se^u - E) f(u) du =$$

$$= \phi Se^{-DT} N(\phi x_1) - \phi Ee^{-RT} N(\phi x_1 - \phi \sigma \sqrt{T})$$

con  $\phi = 1, \eta = 1$ ,

$$x = \frac{\log \frac{S}{E}}{\sigma \sqrt{T}} + \lambda \sigma \sqrt{T} = \frac{\log \frac{S}{E} + \left( R - D + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}$$

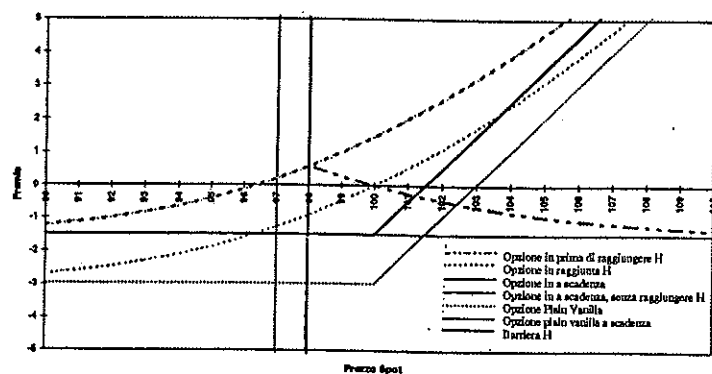
Si ottiene, quindi:

$$c_{di(E < H)} = (4) + (1) - (2) + (5) \quad (\phi = 1, \eta = 1)$$

Come abbiamo anticipato, le opzioni down-and-in call sono molto diffuse e solitamente la barriera è posta al di sotto del prezzo di esercizio, cioè  $E > H$ , e vengono utilizzate per proteggersi o scommettere su un

<sup>7</sup> Come si può notare  $x$  è identico a  $d_1$  dell'equazione di Black-Scholes.





apprezzamento dell'attività sottostante ad un costo minore rispetto ad una plain vanilla, perchè il prezzo dell'underlying deve scendere almeno una volta fino a toccare la barriera, per poi risalire oltre il prezzo di esercizio.

Il profilo dei profitti della down-and-in call, con  $E > H$  ed in assenza di rebate, è mostrato dal grafico 11.

Per ciò che riguarda il  $\Delta$  di questa opzione, prima di toccare la barriera esso risulta negativo e diminuisce quanto più la barriera è lontana dal prezzo spot e quanto più l'opzione è prossima alla scadenza; se poi la barriera viene toccata, il  $\Delta$  diventa identico a quello di una plain vanilla.

Il fatto che nell'attraversare la barriera il delta passi da valori negativi a valori positivi, cioè abbia un punto di discontinuità, determina notevoli difficoltà di copertura dinamica, poichè il gamma dell'opzione in quel punto non è calcolabile.

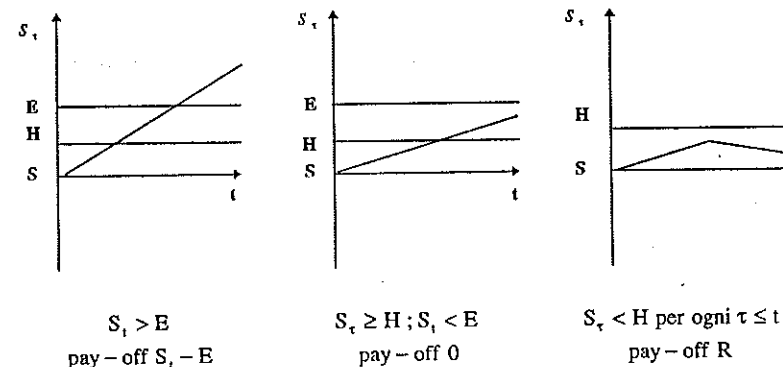
2) UP-AND-IN CALL

Consiste in una opzione call che viene in esistenza solo se il prezzo del sottostante  $S$  sale fino a toccare, almeno per un istante, la barriera  $H$  (quindi  $S < H$ ).

Il pay-off sarà, quindi, pari a:

$$\text{pay-off} \begin{cases} \max(0, S_t - E) & \text{se } S_t \geq H \text{ per qualche } \tau \leq t \\ R & \text{se } S_t < H \text{ per ogni } \tau \leq t \end{cases}$$

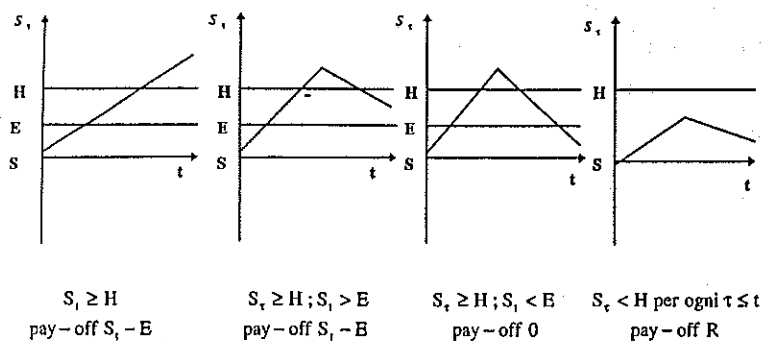
In particolare se  $E > H$  si ottengono i tre casi:



Si comprende, quindi, che il valore di questa opzione barrier è dato dalla somma dei termini (1) (valore attuale del pay-off per la probabilità che  $S_t$  sia maggiore di  $E$ ) e (5) (valore attuale del rebate per la probabilità che  $S_t$  sia inferiore ad  $H$  e non sia mai salito oltre esso) con  $\phi = 1, \eta = -1$ , cioè:

$$c_{ui(E>H)} = (1) + (5) \quad (\phi = 1, \eta = -1).$$

Per  $E < H$  si hanno i quattro casi mostrati nella pagina seguente.



In questo caso il premio dell'opzione sarà pari alla somma del termine (2) (valore attuale del pay-off per la probabilità che  $S_t$  sia maggiore di  $H$ ), di un secondo termine pari al valore attuale di  $S_t - E$  per la probabilità che  $S$  salga fino ad  $H$  e poi ridiscenda al di sopra di  $E$  (ottenuta come differenza tra la probabilità che  $S$  salga fino ad  $H$  e ridiscenda sotto la stessa barriera e la probabilità che  $S$  salga fino ad  $H$  e ridiscenda sotto  $E$ ) dato dalla differenza dei termini (4) e (3) con  $\eta = -1$ , ed infine del termine (5).

Si avrà, quindi:

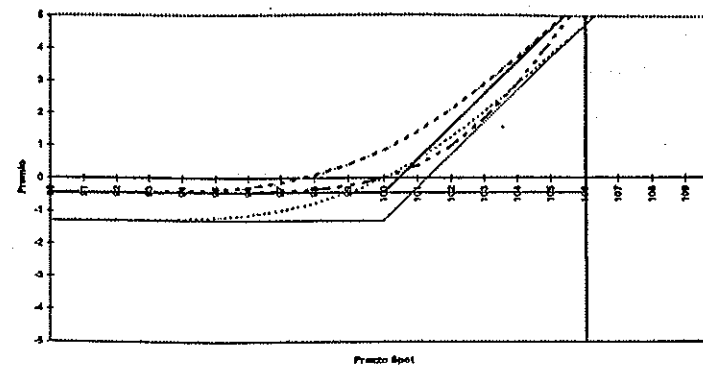
$$c_{ui(E < H)} = (2) + (4) - (3) + (5) \quad (\phi = 1, \eta = -1).$$

Le opzioni up-and-in call, il cui profilo dei profitti è illustrato dal grafico 12 (in cui  $E < H$  ed è assente il rebate), vengono acquistate per proteggersi o scommettere su un apprezzamento dell'attività sottostante oltre la barriera e non solo oltre il prezzo d'esercizio, con un costo, quindi, ridotto rispetto all'acquisto di una call plain vanilla.

In questo secondo caso il delta dell'opzione, se la barriera è vicina allo strike, risulta molto simile a quello di una plain vanilla mentre rimane più

UP-AND-IN CALL CON  $S=E=100, H=106$

GRAFICO 12



basso quanto più la barriera è lontana dallo strike; al ridursi della vita residua, inoltre, esso tende a zero.

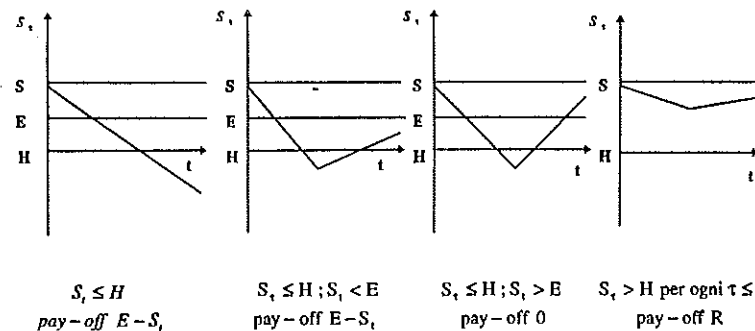
### 3) DOWN-AND-IN PUT

Consiste in una opzione put che viene in esistenza solamente se il prezzo del sottostante  $S$  scende fino a toccare la barriera  $H$  (anche in questo caso  $S > H$ ).

Il pay-off dell'opzione è, perciò:

$$\text{pay-off} \begin{cases} \max(0, E - S_t) & \text{se } S_t \leq H \text{ per qualche } \tau \leq t \\ R & \text{se } S_t > H \text{ per ogni } \tau \leq t \end{cases}$$

In particolare per  $E > H$  si ottengono i casi:

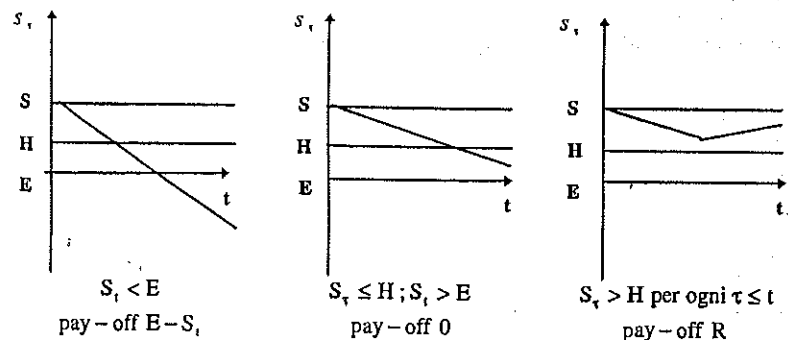


Ricordando quanto detto, il valore dell'opzione sarà pari ai termini (2) (valore attuale del pay-off per la probabilità che  $S_t$  sia minore di  $H$ ), (4) - (3) (valore attuale del pay-off per la probabilità che  $S$  scenda fino ad  $H$  e risalga oltre essa sottratto il valore attuale del pay-off per la probabilità che  $S$  scenda fino ad  $H$  ma risalga oltre  $E$ ) e (5) (rebate), con  $\phi = -1; \eta = 1$ .

Si avrà, quindi:

$$P_{di(E>H)} = (2) + (4) - (3) + (5) \quad (\phi = -1, \eta = 1).$$

Per  $E < H$  si ha, invece:



Il premio sarà, in questo caso, pari alla somma dei termini (1) (valore attuale del pay-off per la probabilità che  $S_t$  sia inferiore ad  $E$ ) e (5) (rebate), con  $\phi = -1, \eta = 1$ , cioè:

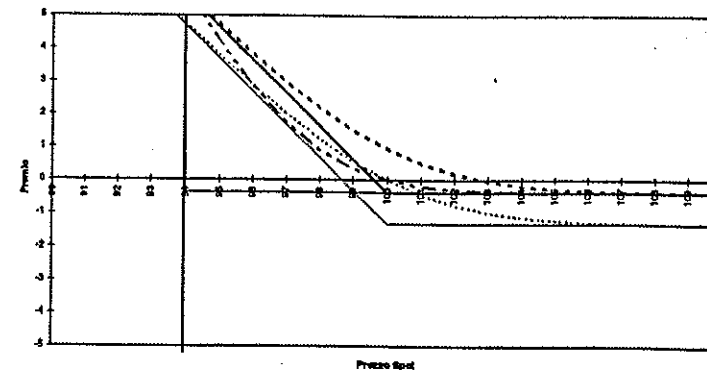
$$P_{di(E<H)} = (1) + (5) \quad (\phi = -1, \eta = 1).$$

Le opzioni down-and-in put, il cui profilo dei profitti è mostrato dal grafico 13 ( $E > H$  ed assenza di rebate), sono acquistate con la finalità di

proteggersi o scommettere su un deprezzamento dell'underlying oltre la barriera, ad un costo più contenuto rispetto all'acquisto di una semplice put. Per ciò che riguarda il delta dell'opzione, in questo caso e nel caso seguente, è applicabile in modo speculare quanto detto per le opzioni call.

DOWN-AND-IN PUT CON  $S=E=100, H=94$

GRAFICO 13



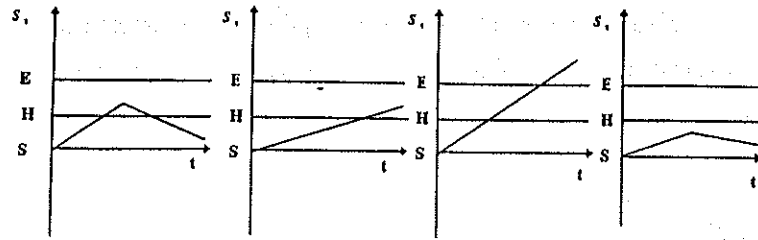
#### 4) UP-AND-IN PUT

Consiste in una opzione put che viene ad esistere solo quando il prezzo del sottostante  $S$  sale fino alla barriera  $H$  almeno una volta ( $S < H$ ).

Il suo pay-off è dato da:

$$\text{pay-off} \begin{cases} \max(0, E - S_t) & \text{se } S_t \geq H \text{ per qualche } \tau \leq t \\ R & \text{se } S_t < H \text{ per ogni } \tau \leq t \end{cases}$$

In particolare per  $E > H$  si ottengono i casi mostrati nella pagina seguente. Il valore della up-and-in put sarà, perciò, pari ai termini (4) (valore attuale del pay-off per la probabilità che  $S$  salga fino ad  $H$  e ridiscenda al di sotto



$S_t \geq H; S_t < H$   
pay-off  $E - S_t$

$S_t \geq H; S_t < E$   
pay-off  $E - S_t$

$S_t \geq E$   
pay-off 0

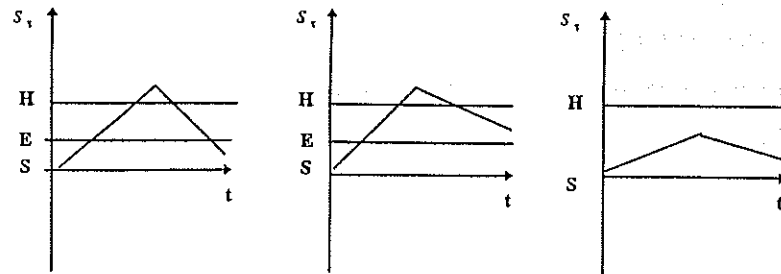
$S_t < H$  per ogni  $\tau \leq t$   
pay-off R

di essa), (1)-(2) (valore attuale del pay-off per la probabilità che  $S_t$  sia inferiore ad  $E$  ma superiore ad  $H$ ), e (5), con  $\phi = -1; \eta = -1$ .

Si avrà, cioè:

$$P_{ui(E>H)} = (4) + (1) - (2) + (5) \quad (\phi = -1, \eta = -1).$$

Per  $E < H$  si hanno, invece, i seguenti casi:



$S_t \geq H; S_t < E$   
pay-off  $E - S_t$

$S_t \geq H; S_t > E$   
pay-off 0

$S_t < H$  per ogni  $\tau \leq t$   
pay-off R

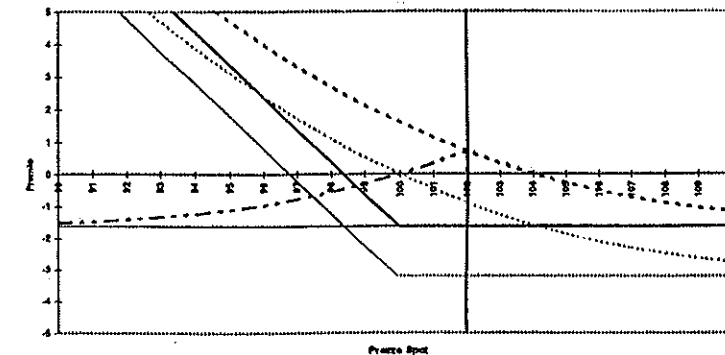
Ne deriva, quindi, un valore della up-and-in put pari alla somma dei termini (3) (valore attuale del pay-off per la probabilità che  $S$  salga fino ad  $H$  e scenda al di sotto di essa) e (5) (rebate), con  $\phi = -1, \eta = -1$ , cioè:

$$P_{ui(E<H)} = (3) + (5) \quad (\phi = -1, \eta = -1).$$

Anche le opzioni up-and-in put con  $E < H$  sono molto diffuse (il profilo dei profitti è mostrato dal grafico 14) in quanto permettono di ottenere copertura o scommettere su un deprezzamento del sottostante a costi minori, perchè il prezzo dell'underlying deve salire almeno una volta a toccare la barriera, per poi scendere oltre il prezzo di esercizio.

UP-AND-IN PUT CON  $S=E=100, H=102$

GRAFICO 14



Prezzo Spot

## B) KNOCK-OUT BARRIER

### 1) DOWN-AND-OUT CALL

Consiste in una opzione call che cessa di esistere quando il prezzo del sottostante  $S$  scende fino a toccare, anche per un solo istante, la barriera  $H$  ( $S > H$ ).

Il pay-off di questa barriera è quindi:

$$\text{pay-off} \begin{cases} \max(0, S_t - E) & \text{se } S_t > H \text{ per ogni } \tau \leq t \\ R \text{ alla barriera} & \text{se } S_t \leq H \text{ per qualche } \tau \leq t \end{cases}$$

Se il rebate fosse nullo, la somma dei pay-off di una opzione down-and-in call (put) e di una opzione down-and-out call (put) sul medesimo sottostante e con gli stessi prezzo di esercizio, barriera e scadenza, sarebbe pari al pay-off di una opzione standard call (put).

Se, infatti, non viene toccata la barriera comune, l'opzione knock-out non cessa di esistere e si riceve il pay-off di una plain vanilla call (put), mentre, se la barriera viene toccata, l'opzione knock-out sparisce ma viene in esistenza l'opzione knock-in, garantendo sempre il pay-off di una opzione standard.

Quanto detto ci consentirebbe di derivare il valore delle opzioni knock-out sottraendo dal valore delle opzioni plain vanilla quello delle corrispondenti opzioni knock-in.

Nel caso in cui, però, sia presente il rebate, nelle opzioni knock-in esso viene pagato alla scadenza (in quanto vi è sempre la possibilità che l'opzione venga in esistenza), mentre nelle opzioni knock-out il pagamento avviene quando il pezzo dell'underlying tocca la barriera.

E', quindi, necessario considerare la funzione di densità relativa al periodo  $\tau$  dopo il quale il prezzo del sottostante tocca la barriera<sup>8</sup>, pari a:

$$h(\tau) = -\frac{\eta \alpha}{\sigma \tau \sqrt{2\pi \tau}} e^{-\frac{1}{2}v^2}$$

$$\text{con } v = -\frac{\eta \alpha + \eta \mu \tau}{\sigma \sqrt{\tau}}$$

Il valore presente del rebate sarà, quindi, pari al valore atteso scontato al tasso privo di rischio, cioè:

$$(6) = R \int_0^T e^{-R\tau} h(\tau) d\tau = \\ = R \left[ \left( \frac{H}{S} \right)^{a+b} N(\eta z) + \left( \frac{H}{S} \right)^{a-b} N(\eta z - 2\eta b \sigma \sqrt{T}) \right]$$

$$\text{con } z = \frac{\log \frac{H}{S}}{\sigma \sqrt{T}} + b \sigma \sqrt{T}, a = \frac{\mu}{\sigma^2}, b = \frac{\sqrt{\mu^2 + 2R\sigma^2}}{\sigma^2}$$

Ottenuta tale equazione possiamo calcolare il prezzo di una down-and-out call con  $E > H$  ed  $E < H$  sottraendo dal termine (1) (valore di una opzione standard) il valore della medesima down-and-in call, ed aggiungendo il termine (6) al posto del termine (5), cioè:

$$c_{do(E>H)} = (1) - (3) + (6) \quad (\phi = 1, \eta = 1)$$

$$c_{do(E<H)} = (2) - (4) + (6) \quad (\phi = 1, \eta = 1)$$

L'opzione down-and-out call con  $E > H$ , il cui profilo dei profitti è mostrato dal grafico 15 (in assenza di rebate), è molto utilizzata dagli

<sup>8</sup> Essa si ottiene differenziando l'integrale di  $g(u)$  rispetto a  $T$ .

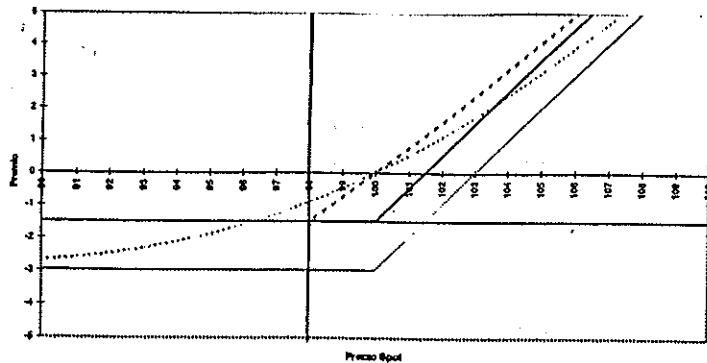
operatori al fine di proteggersi o scommettere su un apprezzamento dell'attività sottostante ad un costo limitato, poichè l'opzione scompare quando il prezzo scende fino alla barriera e l'hedger non ha più bisogno di copertura o la strategia dello speculatore si rivela errata.

Si tratta, però, di un contratto opzionario molto rischioso, poichè il prezzo può subire una inversione di tendenza, lasciando l'hedger privo di copertura ed annullando i profitti dello speculatore, anche se può essere previsto il pagamento del rebate.

Il delta di questa opzione, se la barriera è lontana dal prezzo spot, è poco inferiore a quello di una plain vanilla, mentre diventa molto elevato (superiore ad 1) quando il divario è minimo.

#### DOWN-AND-OUT CALL CON $S=E=100$ , $H=98$

#### GRAFICO 15



#### 2) UP-AND-OUT CALL

Consiste in una opzione call che scompare quando il prezzo dell'underlying  $S$  sale fino a toccare la barriera  $H$  ( $S < H$ ).

Il pay-off è quindi:

$$\text{pay-off} \begin{cases} \max(0, S_t - E) & \text{se } S_t < H \text{ per ogni } \tau \leq t \\ R \text{ alla barriera} & \text{se } S_t \geq H \text{ per qualche } \tau \leq t \end{cases}$$

Il valore di questa opzione, rispettivamente per  $E > H$  ed  $E < H$ , sarà, quindi:

$$c_{uo(E>H)} = (6) \quad (\phi = 1, \eta = -1)^9$$

$$c_{uo(E<H)} = (1) - (2) + (3) - (4) + (6) \quad (\phi = 1, \eta = -1).$$

Il profilo dei profitti dell'opzione up-and-out call, con  $E < H$  ed in assenza di rebate, è mostrato dal grafico 16.

Essa viene acquistata dagli operatori al fine di coprirsi o scommettere su un apprezzamento dell'attività sottostante, rinunciando ad una parte dei profitti potenziali per limitare il premio pagato; è, quindi, simile ad uno spread call al rialzo, ma meno costosa e più rischiosa, perchè oltre un certo livello di prezzo l'opzione scompare.

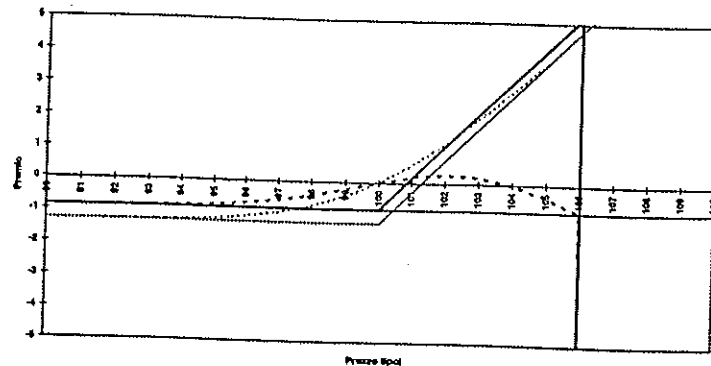
In questo caso il delta dell'opzione prima di toccare la barriera è poco inferiore a quello di una plain vanilla se il prezzo spot è distante dalla barriera; all'avvicinarsi della barriera esso diminuisce fino ad assumere valori negativi (il ridursi della vita residua, invece, ne aumenta il valore).

<sup>9</sup> In questo caso (come per l'opzione down-and-out put con  $E < H$ ) il premio è costituito solo dal termine relativo al rebate, perchè  $S < H < E$  ( $E < H < S$ ), quindi se l'opzione non tocca la barriera è out-of the money.

Anche in questo caso la discontinuità del delta comporta per l'acquirente notevoli difficoltà di copertura nei pressi della barriera.

**UP-AND-OUT CALL CON  $S=E=100$ ,  $H=106$**

**GRAFICO 16**



**3) DOWN-AND-OUT PUT**

Consiste in una opzione put che cessa di esistere quando il prezzo del sottostante  $S$  scende anche una sola volta a toccare la barriera  $H$  ( $S > H$ ).

Il pay-off è dato, quindi, da:

$$\text{pay-off} \begin{cases} \max(0, E - S_t) & \text{se } S_t > H \text{ per ogni } \tau \leq t \\ R \text{ alla barriera} & \text{se } S_t \leq H \text{ per qualche } \tau \leq t \end{cases}$$

Il premio dell'opzione, sarà, quindi, pari a:

$$P_{do(E>H)} = (1) - (2) + (3) - (4) + (6) \quad (\phi = -1, \eta = 1)$$

$$P_{do(E<H)} = (6) \quad (\phi = -1, \eta = 1).$$

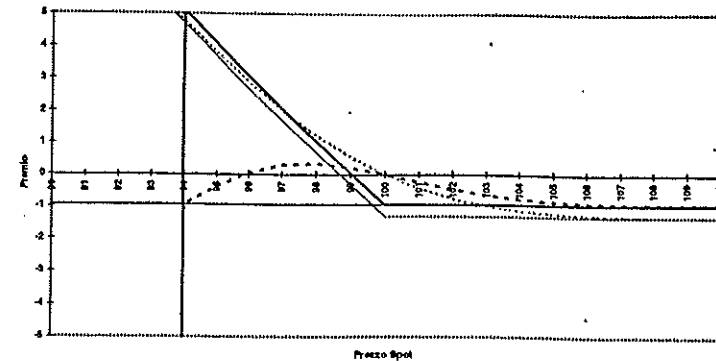
Questa opzione barrier, molto utilizzata con  $E > H$  (si veda il profilo dei profitti nel grafico 17), permette agli acquirenti di proteggersi o scommettere su un deprezzamento dell'attività sottostante, rinunciando ad una parte dei profitti per ridurre il premio.

E' simile, perciò, ad uno spread put al ribasso, ma più rischiosa sebbene più conveniente, perchè al di sotto della barriera l'opzione scompare.

Riguardo al delta, per questa tipologia di opzione e per quella seguente valgono considerazioni simmetriche rispetto alle precedenti.

**DOWN-AND-OUT PUT CON  $S=E=100$ ,  $H=94$**

**GRAFICO 17**



**4) UP-AND-OUT PUT**

Consiste in una opzione put che scompare quando il prezzo del sottostante  $S$  sale fino alla barriera  $H$  ( $S < H$ ).

Il pay-off risulta essere:

$$\text{pay-off} \begin{cases} \max(0, E - S_t) & \text{se } S_t < H \text{ per ogni } \tau \leq t \\ R \text{ alla barriera} & \text{se } S_t \geq H \text{ per qualche } \tau \leq t \end{cases}$$

Il valore della up-and-out put, sarà, quindi, pari a:

$$P_{uo(E>H)} = (2) - (4) + (6) \quad (\phi = -1, \eta = -1)$$

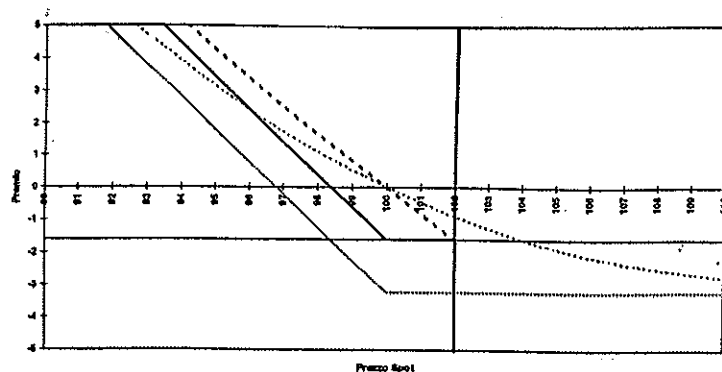
$$P_{uo(E<H)} = (1) - (3) + (6) \quad (\phi = -1, \eta = -1)$$

Tale opzione (il cui profilo dei profitti, con  $E > H$  ed in assenza di rebate, è illustrato dal grafico 18) permette agli operatori di proteggersi da un deprezzamento dell'attività sottostante pagando un premio più limitato, perchè l'opzione scompare quando il prezzo sale fino alla barriera, ossia quando la strategia non è più utile.

E', però, molto rischiosa, perchè l'underlying potrebbe subire una inversione di tendenza, con perdite consistenti per l'acquirente.

UP-AND-OUT PUT CON  $S=E=100$ ,  $H=102$

GRAFICO 18



### b) Replica statica

La replica statica<sup>10</sup> risulta agevole, ed è quindi utilizzata dagli operatori, nel caso di opzioni barrier senza rebate in cui il prezzo di esercizio è uguale o maggiore della barriera.

Per comprendere come essa possa essere messa in atto, consideriamo una opzione down-and-in call e supponiamo, in prima ipotesi, l'uguaglianza dei tassi  $R$  e  $D$ .

Nel caso in cui  $E = H$ , l'opzione down-and-in call può essere replicata attraverso l'acquisto di una opzione put sulla stessa attività sottostante e con gli stessi prezzi di esercizio e scadenza.

Se, infatti, il prezzo dell'underlying rimane sempre al di sopra della barriera, entrambe le opzioni scadono senza valore; nel caso in cui, invece, esso scenda a toccare il livello di barriera, viene in esistenza una opzione standard call at-the-money, ma l'operatore potrà vendere l'opzione put acquistata e comprare, con il ricavato, una identica opzione call plain vanilla (che replica perfettamente il pay-off della knock-in) senza alcun esborso ulteriore.

Per la put-call parity, si ha, infatti, che:

$$c + Ee^{-RT} = p + S^{-DT}$$

e poichè  $R = D$ ,  $S = H = E$ , risulta:

$$c = p.$$

Ne consegue, quindi, che il venditore di una down-and-in call può mettere in atto una strategia di copertura statica della propria posizione semplicemente acquistando inizialmente una opzione put plain vanilla.

Un ragionamento analogo vale quando  $E > H$ .

<sup>10</sup> Bowie, Carr (1994).



In questo caso, però, quando il prezzo dell'underlying tocca la barriera viene in esistenza una opzione call plain vanilla out-of-the-money (in quanto  $E > H = S$ ) per un ammontare  $E - H$ .

Poichè la put-call symmetry<sup>11</sup> afferma che il valore di una opzione call con prezzo di

esercizio  $E$ , quando lo spot è pari ad  $H < E$ , è identico a quello relativo a

$\frac{E}{H}$  put con prezzo di esercizio  $\frac{H^2}{E}$ <sup>12</sup>, la copertura statica potrà essere

effettuata acquistando inizialmente tali opzioni put.

Se, infatti, non viene toccata la barriera, entrambe le strategie scadono senza valore (per le put lo strike  $\frac{H^2}{E}$  è minore di  $H = S$ , perciò non vengono

esercitate); al contrario se l'underlying raggiunge la barriera e viene in esistenza l'opzione call out-of-the-money, le opzioni put acquistate potranno essere rivendute per acquistare esattamente una standard call identica a quella venduta.

Come abbiamo anticipato, tale logica non può essere applicata nel caso in cui  $E < H$ , in quanto alla barriera l'opzione call che viene in esistenza è in-the-money, ossia oltre al valore temporale ha anche un valore intrinseco, il che rende l'analisi troppo complessa per poter essere agevolmente utilizzata.

Accantoniamo ora l'ipotesi irrealistica per la quale  $R = D$ .

<sup>11</sup> Carr (1994).

<sup>12</sup> Perché la call e la put out-of-the-money abbiano lo stesso valore per un certo livello del prezzo spot (ossia la barriera), è necessario che la media geometrica dei prezzi di esercizio sia uguale a tale prezzo, infatti  $\sqrt{\frac{H^2}{E}} E = H$ ; per ottenere, poi, il numero di put è sufficiente rapportare la differenza  $E - H$  (di quanto è out-of-the-money la call) alla differenza  $H - \frac{H^2}{E}$  (di quanto è out-of-the-money la put), cioè  $\frac{E}{H}$ .

Se risulta  $R > D$ , dalla put-call parity si ha che:

$$c + Ee^{-RT} = p + Se^{-DT}$$

$$\Rightarrow c > p$$

quindi la put (per  $E = H$ ) o le put (per  $E > H$ ) acquistate non saranno sufficienti per comprare la call, ed il venditore della down-and-in call richiederà un prezzo maggiore per la copertura.

Se, invece,  $R < D$ , la put-call parity mostra che:

$$c + Ee^{-RT} = p + Se^{-DT}$$

$$\Rightarrow c < p$$

perciò la put (per  $E = H$ ) o le put (per  $E > H$ ) acquistate permettono di realizzare un valore che eccede quello della call, quindi la down-and-in call verrà venduta a prezzi inferiori.

### 3.3 Le Opzioni Lookback

**Finalità per l'acquirente:** acquistare (vendere) l'attività finanziaria al prezzo minimo (massimo) registrato durante la vita dell'opzione.

L'opzione lookback call (put)<sup>14</sup> ha un pay-off a scadenza nullo se il prezzo dell'underlying  $S_t$  è inferiore (superiore) al suo livello minimo (massimo) raggiunto durante la vita dell'opzione, oppure pari alla differenza tra il prezzo dell'underlying e tale livello minimo raggiunto (o alla differenza tra il massimo livello raggiunto ed  $S_t$  nel caso di opzioni put).

Si ha, cioè:

$$\text{call: pay-off} \begin{cases} 0 & S_t \leq \min(S) \\ S_t - \min(S) & S_t > \min(S) \end{cases} \quad \text{put: pay-off} \begin{cases} \max(S) - S_t & S_t < \max(S) \\ 0 & S_t \geq \max(S) \end{cases}$$

Si comprende come il valore di una opzione lookback sia particolarmente elevato rispetto agli altri tipi di opzioni esotiche, in quanto tale contratto verrà sempre esercitato, permettendo l'acquisto (vendita) dell'underlying a condizioni vantaggiose.

#### a) Replica dinamica

##### 1) Modello di Black-Scholes

Poichè le opzioni lookback call e put verranno sempre esercitate, il loro pay-off può essere scritto come:

$$\text{call pay-off: } \max [0; S_t - \min(S)] = S_t - \min(S)$$

$$\text{put pay-off: } \max [0; \max(S) - S_t] = \max(S) - S_t$$

<sup>14</sup> Sull'argomento Goldman, Sosin, Gatto (1979); Garman (1989).

ed utilizzando l'ipotesi di valutazione neutrale verso il rischio degli operatori, cioè scontando il valore atteso dell'opzione al tasso privo di rischio, si ottiene che:

$$c = Se^{-DT} - Me^{-RT} N\left(\frac{b + \mu T}{\sigma \sqrt{T}}\right) + Me^{-RT} \lambda e^{b(1-\lambda)} N\left(\frac{-b + \mu T}{\sigma \sqrt{T}}\right) - Se^{-DT} (1 + \lambda) N\left(\frac{-b - \mu T - \sigma^2 T}{\sigma \sqrt{T}}\right)$$

$$p = Se^{-DT} + Me^{-RT} N\left(\frac{-b + \mu T}{\sigma \sqrt{T}}\right) - Me^{-RT} \lambda e^{b(1-\lambda)} N\left(\frac{b - \mu T}{\sigma \sqrt{T}}\right) + Se^{-DT} (1 + \lambda) N\left(\frac{b + \mu T + \sigma^2 T}{\sigma \sqrt{T}}\right)$$

dove  $M$  è il livello minimo (call) o massimo (put) raggiunto dal prezzo dell'underlying,

$$b = \log \frac{S}{M}, \quad \mu = R - D - \frac{\sigma^2}{2}, \quad \lambda = \frac{\sigma^2}{R - D}$$

A differenza delle opzioni standard put il delta della lookback put può assumere valori positivi, poichè sarebbe molto favorevole per l'holder che il prezzo del sottostante salisse verso massimi sempre più elevati, per poi ridursi al momento della scadenza.

##### 2) Modello binomiale

Poichè, come abbiamo anticipato, il valore delle opzioni lookback dipende da una funzione  $F(t, S)$  del sentiero percorso dal sottostante che non assume troppi valori ad ogni nodo, tale modello<sup>15</sup> può essere applicato semplicemente inserendo nell'albero dei prezzi dell'underlying il valore (o i valori) minimo o massimo di  $S$  fino a quel nodo.

<sup>15</sup> White (1993); Hull, White (1993).

Ottenuto il livello minimo (massimo) dell'underlying alla scadenza e confrontandolo con  $S_t$ , è possibile calcolare il valore finale dell'opzione e, scontando quest'ultimo, il valore dell'opzione lookback ad ogni nodo.

Ipotizziamo, ad esempio, il caso di una lookback put europea a tre mesi su una attività che non paga dividendi, con  $S = 50$ ,  $\sigma = 40\%$ ,  $R = 10\%$ ,  $\Delta t = 0,0833$  (la vita dell'opzione viene, cioè, divisa in 3 periodi di un mese).

Si ottengono i valori:

$$p = 0,5073 \quad u = 1,1224$$

$$1 - p = 0,4927$$

$$d = 0,8909 \quad a = 1,0084$$

L'albero binomiale che ne deriva, inserendo ad ogni nodo il prezzo dell'underlying ed il valore massimo raggiunto da questo ultimo fino a quel momento, è illustrato dal grafico 19.

Dopo aver derivato il pay-off dell'opzione negli ultimi nodi, il prezzo della lookback ai penultimi nodi può essere calcolato come valore atteso del prezzo dell'opzione un periodo prima, ad esempio:

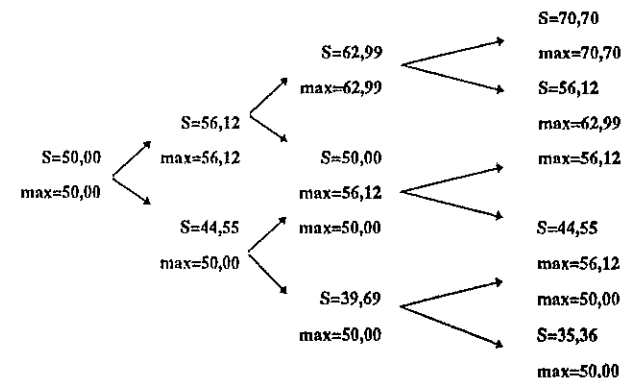
$$5,65 = (0,5073 \times 0 + 0,4927 \times 11,56) e^{-0,0833}$$

come mostra il grafico 20, in cui sono riportati i valori massimi di  $S$  ed il premio dell'opzione ad ogni nodo.

Risalendo in questo modo fino al tempo 0 si ottiene il valore stimato della lookback put, pari a 5,26.

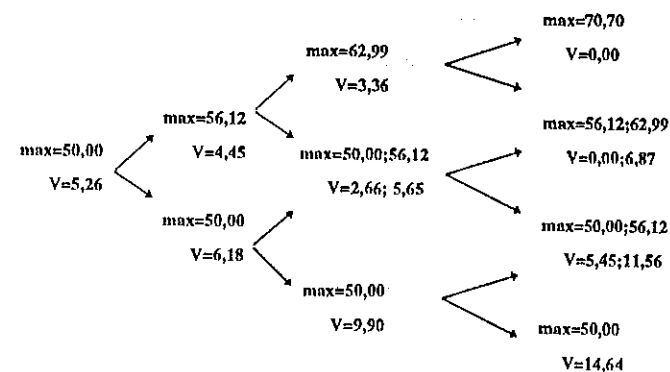
ALBERO PER L'OPZIONE LOOKBACK PUT

GRAFICO 19



VALORI DELL'OPZIONE LOOKBACK PUT

GRAFICO 20



b) Replica statica

Per ciò che riguarda la replica statica, non è stato ancora elaborato alcun portafoglio di replica nel caso dell'opzione lookback.

### 3.4 Le Opzioni Average o Asian

**Finalità per l'acquirente:** ottenere una protezione (spesso relativa a flussi di cassa periodici) contro movimenti di prezzo ad un costo più contenuto rispetto a quello delle plain vanilla.

Le opzioni average<sup>16</sup> si caratterizzano per il fatto che il loro pay-off dipende dalla media dei prezzi dell'underlying fino alla scadenza, quindi hanno prezzi minori rispetto alle opzioni standard, poichè i prezzi medi sono poco volatili.

Tale media solitamente è aritmetica<sup>17</sup> (ciò è dovuto alla semplicità di calcolo, sebbene la letteratura considera anche la media geometrica, poichè solo per quest'ultima sono disponibili formule chiuse di valutazione) e la rilevazione dei prezzi, che può cominciare subito o essere differita, può essere discreta (mensile, settimanale, giornaliera..., con la possibilità di clausole floor e cap che escludono dalla serie considerata i prezzi troppo bassi o troppo alti) o continua.

A seconda del tipo di influenza sul pay-off della media, le opzioni average possono essere divise in:

1) **Average-Price call (put)**, in cui il pay-off a scadenza è nullo nel caso in cui il prezzo dell'underlying  $S_i$  sia inferiore (superiore) al prezzo di esercizio  $E$ , oppure pari alla differenza tra la media  $M$  dei prezzi del

<sup>16</sup> The Globecon Group LTD (1995); Pitarino; Levy (1993).

<sup>17</sup> Per media aritmetica si intende il rapporto  $\sum_{i=0}^n \frac{S_i}{n+1}$  con  $i = 0, 1, \dots, n+1$ , mentre per media geometrica  $(\prod_i S_i)^{\frac{1}{n+1}}$ .

sottostante durante la vita dell'opzione e lo strike price  $E$  (o viceversa) se  $S_i$  è superiore (inferiore) ad  $E$ .

Si ha, cioè:

$$\text{call: pay-off} \begin{cases} 0 & S_i \leq E \\ M - E & S_i > E \end{cases} \quad \text{put: pay-off} \begin{cases} E - M & S_i < E \\ 0 & S_i \geq E \end{cases}$$

Da quanto detto emerge come le opzioni average-price possono essere utilizzate, ad esempio, per coprire periodici flussi di cassa in valuta a costi inferiori rispetto all'acquisto di un portafoglio di opzioni.

#### a) Replica dinamica

##### 1) Modello di Black-Scholes

Purtroppo non è possibile derivare una formula di valutazione del tipo Black-Scholes nel caso delle più diffuse average price aritmetiche (alle quali verrà applicato il modello numerico) come avviene, invece, per le average-price geometriche<sup>18</sup>, per le quali si ottiene la seguente formula relativa alle opzioni call<sup>19</sup>:

$$c = X e^{-RT} e^{M + \frac{1}{2} \Sigma^2} N(x) - E e^{-RT} N(x - \Sigma)$$

con:

<sup>18</sup> Ciò è dovuto al fatto che il prodotto di più variabili casuali lognormali è ancora distribuito in modo lognormale, mentre non lo è la somma.

<sup>19</sup> Rubinstein (1993).

$$x = \frac{\log\left(\frac{X}{E} + M\right)}{\Sigma} + \Sigma X = A^{\frac{t_1}{t_1+t_2+h}} S^{\frac{t_2+h}{t_1+t_2+h}}, M = \frac{t_0+t_2(t_2+h)}{2(t_1+t_2+h)} \left[ R - D - \frac{\sigma^2}{2} \right],$$

$$\Sigma^2 = \left[ \frac{t_0+t_2(t_2+h)2(t_2+h)}{6(t_1+t_2+h)^2} \right] \sigma^2$$

dove  $t_0$  è il tempo prima che inizi il calcolo della media,  $t_1$  il momento in cui tale calcolo comincia e  $t_2$  il tempo restante (quindi la vita dell'opzione è pari a  $t = t_0 + t_2$ ),  $h$  la frequenza delle osservazioni ed  $A$  il valore corrente della media geometrica dei prezzi del sottostante.

Nel caso particolare in cui le rilevazioni sono continue ( $h = 0$ ) ed il calcolo della media comincia dalla stipula del contratto ( $t_0 = t_1 = t, t_2 = t$  ed  $A$  è uguale ad 1), la formula può essere semplificata come:

$$c = S e^{-D\frac{t}{2}} e^{-R\frac{t}{2}} e^{-\sigma^2\frac{t}{12}} N(x) - E e^{-RT} N\left(x - \sigma\sqrt{\frac{t}{3}}\right)$$

con:

$$x = \frac{R\frac{t}{2} - D\frac{t}{2} + \log\frac{S}{E} + \sigma\sqrt{\frac{t}{3}}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{3}}}$$

## 2) Modello binomiale

Come abbiamo anticipato, l'applicazione del modello CRR alle opzioni average-price aritmetiche incontra delle difficoltà legate alla crescita notevole dei valori della funzione del sentiero percorso  $F(t,S)$  ad ogni nodo, al crescere degli intervalli di tempo considerati.

Tali impedimenti possono, però, essere superati<sup>20</sup> calcolando, ad ogni nodo, non tutti i possibili valori di  $F$ , ma solamente quelli che hanno la forma  $S(0)e^{mh}$ , con  $h$  costante ed  $m$  numero intero.

Solamente per tali valori di  $F$  verrà, quindi, calcolato il valore dell'opzione, mentre per valori diversi si procederà ad un calcolo del prezzo per interpolazione.

Per illustrare meglio il procedimento prendiamo il caso di una opzione average-price call il cui albero binomiale, per la prima parte della vita dell'opzione, è illustrato dal grafico 21, in cui sono riportati anche i valori minimi e massimi della media.

Considerando il nodo  $X$  e supponendo che  $h = 0,08$ , poichè la media minima raggiungibile è 38,78 e quella massima è 41,33, dovremo in questo nodo calcolare i valori di  $S(0)e^{mh} = 40e^{m \cdot 0,08}$  tali da comprendere il minimo ed il massimo livello della media, cioè scegliendo  $m$  che varia tra -1 e 1.

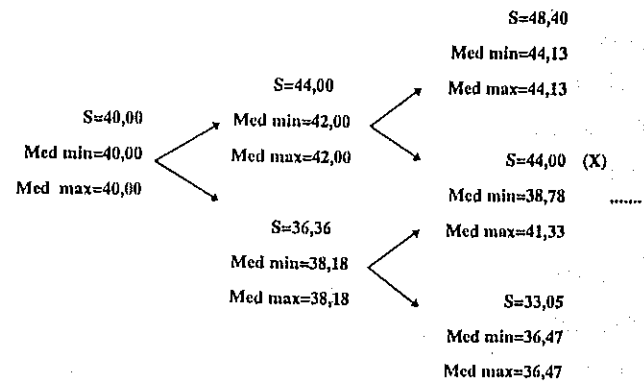
Come mostra il grafico 22 si ottengono, infatti, i valori di  $F$ : 36,92; 40,00 e 43,33.

Nell'intervallo di tempo successivo il valore minimo e massimo raggiungibile è pari a

$$\frac{36,92 \times 3 + 36,36}{4} = 36,78; \quad \frac{43,33 \times 3 + 44,00}{4} = 43,50$$

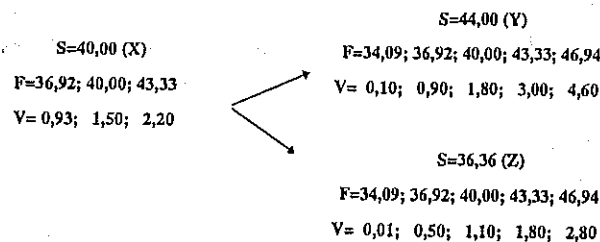
<sup>20</sup> Hull, White (1993).

### ALBERO PER L'OPZIONE AVERAGE-PRICE CALL GRAFICO 21



### VALUTAZIONE DELL'AVERAGE CALL AL NODO X

GRAFICO 22



quindi nei nodi Y e Z occorrerà calcolare i valori di  $S(0)e^{mh} = 40e^{m \cdot 0,08}$  con m che varia tra -2 e 2, ottenendo le medie indicate nel grafico 22.

Un ragionamento analogo varrà anche per i nodi successivi.

Dopo aver calcolato l'intero albero binomiale nel modo descritto, per ottenere i valori V dell'average-price call nei vari nodi è sufficiente valutare quest'ultima nei nodi finali, considerando solamente i valori scelti di F.

Supponendo in questo caso di avere i valori V nei nodi Y e Z (dato che, per semplicità, non è stato considerato l'intero albero binomiale), il prezzo dell'opzione in X quando la media è pari, ad esempio, a 43,33 è ottenuto scontando il valore atteso dei livelli di V in Y quando

$$F = \frac{43,33 \times 3 + 44,00}{4} = 43,50 \text{ e in Z quando}$$

$$F = \frac{43,33 \times 3 + 36,36}{4} = 41,59 .$$

Tali livelli, non essendo già stati calcolati nell'albero binomiale (V è stato, infatti, derivato solo per alcuni valori di F, per evitare che i dati da elaborare diventassero eccessivi), vengono ottenuti attraverso un procedimento di interpolazione.

Il valore di V in Y, quando  $F = 43,50$ , può essere calcolato sommando a V per  $F = 43,33$  la differenza tra V per  $F = 46,94$  ed  $F = 43,33$ , moltiplicata per 0,047, poichè 43,50 rappresenta il 4,7% della distanza tra 43,33 e 46,94. Si ha, cioè:

$$V_{up} = 3,00 + (4,60 - 3,00) \frac{43,50 - 43,33}{46,94 - 43,33} = 3,08 .$$

Allo stesso modo il livello di V in Z, quando  $F = 41,59$ , è pari a:

$$V_{down} = 1,10 + (1,80 - 1,10) \frac{41,59 - 40,00}{43,33 - 40,00} = 1,43 .$$

Supponendo che  $p = 0,5$ ,  $\Delta t = 0,25$ ,  $R = 0,1$ , il valore di  $V$  in  $X$  quando  $F = 43,33$  sarà pari a:

$$V = (3,08 \times 0,5 + 1,43 \times 0,5) e^{-0,25 \times 0,1} = 2,20$$

### b) Replica statica

Anche in questo caso la complessità dell'opzione non ha ancora permesso la costruzione di alcun portafoglio di replica statica.

2) *Average-Strike* call (put), in cui il pay-off a scadenza è nullo nel caso in cui il prezzo dell'underlying  $S_t$  sia inferiore (superiore) alla media  $M$  dei prezzi del sottostante durante la vita dell'opzione, oppure pari alla differenza tra  $S_t$  ed  $M$  (o viceversa) se  $S_t$  è superiore (inferiore) alla media.

Si ha, cioè:

$$\text{call: pay-off} \begin{cases} 0 & S_t \leq M \\ S_t - M & S_t > M \end{cases} \quad \text{put: pay-off} \begin{cases} M - S_t & S_t < M \\ 0 & S_t \geq M \end{cases}$$

Poichè, in questo caso, è il prezzo di esercizio ad essere uguale alla media dei prezzi, le opzioni average-strike possono essere utilizzate, ad esempio, quando un operatore deve effettuare una transazione in valuta ma non ha una idea precisa sullo strike da fissare, quindi preferisce porlo uguale al prezzo medio del periodo.

### a) Replica dinamica

#### 1) Modello di Black-Scholes

La maggior complessità del pay-off delle average-strike ha permesso solo la costruzione della formula di valutazione nel caso geometrico e con rilevazioni continue ( $h = 0$ ), che per le opzioni call è pari a:

$$c = S e^{-Dt} \left[ N(x) - e^{-(R-D)\frac{t}{2}} e^{-\frac{\sigma^2 t}{12}} N\left(x - \sigma \sqrt{\frac{t}{3}}\right) \right]$$

con:

$$x = \frac{\frac{t}{2}(R-D) + \frac{\sigma^2 t}{4}}{\sigma \sqrt{\frac{t}{3}}}$$

#### 2) Modello binomiale

Anche alle average-strike può essere applicato il CRR in modo simile al caso precedente, sebbene il limitato utilizzo di questo tipo di opzioni non abbia diffuso molto l'uso di questo metodo di valutazione.

### b) Replica statica

Come nel caso precedente non è ancora possibile elaborare alcun procedimento di replica statica.

#### 4 CONCLUSIONI

Il crescente interesse degli operatori per derivati finanziari innovativi ancora poco considerati dalla letteratura, quali le *opzioni esotiche*, ci ha spinto ad una loro analisi più approfondita, con un particolare riguardo per le modalità di pricing e copertura.

Dopo una breve rassegna dei modelli dinamici che permettono il pricing delle opzioni standard, si è passati all'analisi delle due tipologie fondamentali di opzioni esotiche, ossia le opzioni *path-independent* (opzioni *binarie*, *pay-later* e *forward-start*) e *path-dependent* (opzioni *chooser*, *barrier*, *lookback* ed *asian*).

Partendo dalla descrizione delle caratteristiche contrattuali, in grado di evidenziare le principali possibilità di utilizzo, l'approccio utilizzato è stato, in primo luogo, quello di estendere ad esse le modalità di pricing (e copertura) dinamiche analizzate per le opzioni plain vanilla, che, per la maggiore complessità degli strumenti, risultano essere più elaborate e ancora poco conosciute alla letteratura.

Dall'analisi effettuata, però, è emerso come gli operatori che utilizzano attualmente questo tipo di strumenti non siano interessati ai "prezzi di equilibrio", ottenuti attraverso modelli di valutazione dinamici che si fondano su ipotesi irrealistiche, come nel caso delle formule di Black-Scholes.

Essi ricercano, invece, "prezzi di arbitraggio", ossia legati alla costruzione di un portafoglio di replica statica, che riproduce, esattamente ed in ogni momento, il profilo del pay-off dell'opzione esotica mediante posizioni su opzioni standard con diversi prezzi di esercizio e scadenze.

Tale modalità statica di replica ha il vantaggio di permettere un semplice procedimento di pricing dell'esotica (sommando i prezzi delle opzioni componenti il portafoglio) e di copertura (che non richiede continui ribilanciamenti).

Per questa ragione il presente lavoro si è posto la finalità di fornire, quando possibile, un confronto tra modalità dinamiche e statiche di pricing e copertura delle posizioni su opzioni esotiche, in grado di offrire un utile supporto all'utilizzo e alla diffusione di tali strumenti.

La replica statica, in particolare, permette di gestire molto più agevolmente strumenti opzionari anche complessi.

Come anticipato, l'analisi è stata condotta per le opzioni esotiche su underlying rappresentati da titoli e valute.

Sebbene tale dovesse essere il punto di partenza, un interessante proseguo è rappresentato dall'estensione dello studio alle opzioni esotiche su tassi di interesse.

Anche se sono più difficilmente gestibili per il venir meno dell'ipotesi di lognormalità del prezzo dell'underlying, queste ultime vengono sempre più utilizzate per creare strumenti finanziari complessi che le abbinano ai certificati di deposito.



## Appendice 1

Come abbiamo anticipato è possibile ottenere le formule di Black-Scholes scontando il pay-off atteso alla scadenza al tasso di interesse privo di rischio; si ha, cioè:

$$v = e^{-RT} E[\max(0, \phi SR - \phi E)]$$

dove  $E$  indica il valore atteso,  $S$  il prezzo spot,  $R = \frac{S_t}{S}$  distribuito come una variabile casuale lognormale e  $\phi$  è una variabile binaria uguale ad 1 per la call ed a -1 per la put.

Utilizzando gli integrali si ottiene:

$$v = e^{-RT} \int_{\frac{E}{S}}^{\phi \infty} (\phi SR - \phi E) f(R) dR$$

con  $f(R)$  funzione di densità della variabile casuale  $R$ .

Ponendo  $u = \log R$  si ottiene:

$$v = e^{-RT} \int_{\frac{E}{S}}^{\phi \infty} (\phi S e^u - \phi E) f(u) du$$

con  $u$  variabile casuale di media  $\mu T = \left( R - D - \frac{\sigma^2}{2} \right) T$  e deviazione standard  $\sigma \sqrt{T}$ .

Ponendo ora  $z = \frac{u - \mu T}{\sigma \sqrt{T}}$  (da cui  $u = z\sigma \sqrt{T} + \mu T$ ), si ha:

$$v = e^{-RT} \int_{\frac{\log \frac{E}{S} - \mu T}{\sigma \sqrt{T}}}^{\phi \infty} (\phi S e^{\mu T + \sigma \sqrt{T} z} - \phi E) f(z) dz$$

dove  $z$  è la variabile casuale normale standardizzata che ha funzione di densità:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

Dividendo l'integrale in due parti:

$$v = e^{-RT} \int_{\frac{\log \frac{E}{S} - \mu T}{\sigma \sqrt{T}}}^{\phi \infty} \phi S e^{\mu T + \sigma \sqrt{T} z} f(z) dz - \phi E e^{-RT} \int_{\frac{\log \frac{E}{S} - \mu T}{\sigma \sqrt{T}}}^{\phi \infty} f(z) dz$$

Sostituendo  $\mu T = \left( R - D - \frac{\sigma^2}{2} \right) T$ :

$$v = e^{-RT} \int_{\frac{\log \frac{E}{S} - \left( R - D - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}}^{\phi \infty} \phi S e^{\left( R - D - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \sqrt{T} z} f(z) dz - \phi E e^{-RT} \int_{\frac{\log \frac{E}{S} - \left( R - D - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}}^{\phi \infty} f(z) dz$$

da cui:

$$v = e^{-RT} \int_{\frac{\log \frac{E}{S} \left( R-D-\frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}}^{\phi_{\infty}} \phi S e^{(R-D)T} e^{\frac{\sigma^2}{2} T + \sigma \sqrt{T} z} f(z) dz - \phi E e^{-RT} \int_{\frac{\log \frac{E}{S} \left( R-D-\frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}}^{\phi_{\infty}} f(z) dz$$

$$\Rightarrow v = e^{-RT} e^{RT} \phi S e^{-DT} \int_{\frac{\log \frac{E}{S} \left( R-D-\frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}}^{\phi_{\infty}} e^{\frac{\sigma^2}{2} T + \sigma \sqrt{T} z} f(z) dz - \phi E e^{-RT} \int_{\frac{\log \frac{E}{S} \left( R-D-\frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}}^{\phi_{\infty}} f(z) dz.$$

Ricordando che  $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ :

$$v = \phi S e^{-DT} \int_{\frac{\log \frac{E}{S} \left( R-D-\frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}}^{\phi_{\infty}} e^{\frac{\sigma^2}{2} T + \sigma \sqrt{T} z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - \phi E e^{-RT} \int_{\frac{\log \frac{E}{S} \left( R-D-\frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}}^{\phi_{\infty}} f(z) dz.$$

Poichè il primo integrale si può scrivere come:

$$\frac{\int_{\frac{\log \frac{E}{S} \left( R-D-\frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}}^{\phi_{\infty}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(\sigma^2 T - 2\sigma \sqrt{T} z + z^2)} dz = \int_{\frac{\log \frac{E}{S} \left( R-D-\frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}}^{\phi_{\infty}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(-\sigma \sqrt{T} + z)^2} dz$$

e ponendo  $-\sigma \sqrt{T} + z = w$ , con  $f(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w^2}$ :

$$\frac{\int_{\frac{\log \frac{E}{S} \left( R-D-\frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}}^{\phi_{\infty}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw = \int_{\frac{\log \frac{E}{S} \left( R-D+\frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}}^{\phi_{\infty}} f(w) dw$$

Si ottiene quindi:

$$v = \phi S e^{-DT} \int_{\frac{\log \frac{E}{S} \left( R-D+\frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}}^{\phi_{\infty}} f(w) dw - \phi E e^{-RT} \int_{\frac{\log \frac{E}{S} \left( R-D-\frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}}^{\phi_{\infty}} f(z) dz.$$

Invertendo gli estremi degli integrali cambiati di segno, si ha:

$$v = \phi S e^{-DT} \int_{-\phi_{\infty}}^{\frac{\log \frac{S}{E} + \left( R-D+\frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}} f(w) dw - \phi E e^{-RT} \int_{-\phi_{\infty}}^{\frac{\log \frac{S}{E} + \left( R-D-\frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}} f(z) dz$$

ossia:

$$v = \phi S e^{-DT} N(\phi d_1) - \phi E e^{-RT} N(\phi d_2)$$

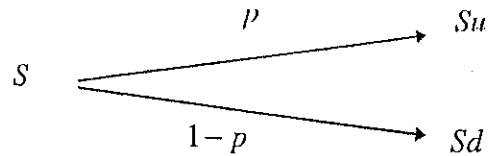
con

$$d_1 = \frac{\log \frac{S}{E} + \left( R-D+\frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\log \frac{S}{E} + \left( R-D-\frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \phi \sigma \sqrt{T}.$$

## Appendice 2

Il modello binomiale suppone che il prezzo dell'attività sottostante, in ogni breve intervallo di tempo  $\Delta t$  in cui può essere divisa la vita residua dell'opzione, segua un processo binomiale, potendo assumere solo due valori:  $Su$  con probabilità  $p$  ed  $Sd$  con probabilità  $(1-p)$ , con  $u > 1, d < 1$ .

Graficamente si ha:



Poiché il tasso di rendimento atteso da ogni attività finanziaria si ipotizza essere pari al tasso di interesse privo di rischio  $R$ , e ricordando che l'attività finanziaria frutta un tasso di interesse  $D$ , il valore atteso del prezzo alla fine dell'intervallo  $\Delta t$  è  $S e^{(R-D)\Delta t}$ , quindi dovrà risultare:

$$S e^{(R-D)\Delta t} = pSu + (1-p)Sd \Rightarrow e^{(R-D)\Delta t} = pu + (1-p)d \quad (1).$$

Poiché, inoltre, la deviazione standard del tasso di variazione del prezzo in un breve intervallo  $\Delta t$  è pari a  $\sigma\sqrt{\Delta t}$ , la varianza della variazione

effettiva sarà pari a  $S^2\sigma^2\Delta t$  infatti  $\frac{\Delta S}{S}S = \Delta S$  e poiché, come

sappiamo,  $V(X) = M(X^2) - M(X)^2$ , si ha che:

$$S^2\sigma^2\Delta t = pS^2u^2 + (1-p)S^2d^2 - S^2[p u + (1-p)d]^2$$

cioè:

$$\sigma^2\Delta t = pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2 \quad (2).$$

Per ottenere  $p, u, d$  alla fine dell'intervallo  $\Delta t$  oltre alle equazioni (1) e (2) è sufficiente imporre:

$$u = \frac{1}{d}$$

Si può dimostrare che le soluzioni di questo sistema sono:

$$p = \frac{a-d}{u-d} \quad u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad a = e^{(R-D)\Delta t}$$

Costruiamo ora l'albero completo (illustrato nel grafico 23) dei prezzi: al tempo zero il prezzo è noto, mentre al tempo  $\Delta t$  i due possibili prezzi sono

$Su$  o  $Sd$  e al tempo  $2\Delta t$  il prezzo può essere  $Su^2, S$  e  $Sd^2$  (infatti

$$Sud = Su \frac{1}{u} = S \text{ e } Sdu = Sd \frac{1}{d} = S).$$

In generale al tempo  $i\Delta t$  gli  $i+1$  prezzi saranno:

$$Su^j d^{i-j} \quad j = 0, 1, \dots, i.$$

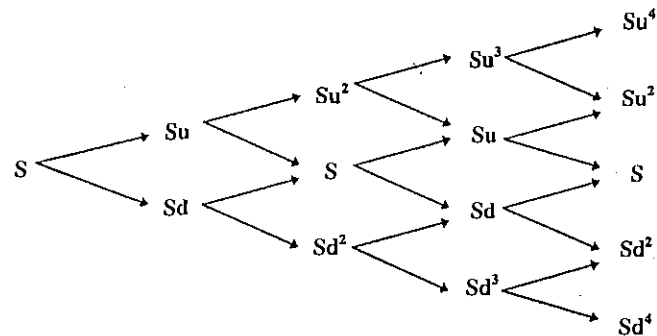
Dopo aver calcolato i parametri è quindi possibile determinare tutti i valori dell'albero dei prezzi dell'attività sottostante.

Passando a questo punto al prezzo delle opzioni, è sufficiente partire dalla fine dell'albero e tornare indietro; infatti il valore al tempo  $T$  di una opzione, ad esempio una call, è noto, essendo pari a  $\max(S_T - E, 0)$ .

Poiché abbiamo assunto che gli operatori siano neutrali verso il rischio il valore dell'opzione al tempo  $T - \Delta t$  può essere calcolato come il valore atteso dell'opzione al tempo  $T$  attualizzato in base al tasso di interesse privo di rischio  $R$  per un periodo di tempo  $\Delta t$ , così come il valore dell'opzione al tempo  $T - 2\Delta t$  si ottiene calcolando il valore atteso dell'opzione al tempo  $T - \Delta t$  attualizzato al tasso di interesse per un periodo di tempo  $\Delta t$ , e così fino al tempo 0.

Nel caso in cui l'opzione sia americana è sufficiente verificare se ad ogni nodo convenga o meno esercitarla anticipatamente.

## ALBERO PER VALUTARE LE OPZIONI



## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- BENSON R., DANIEL N., Up, Over and Out, in RISK (ed.), From Black-Scholes to Black Holes, 1992, pp.179-182.
- BLACK F., The Holes in Black-Scholes, in RISK (ed.), From Black-Scholes to Black Holes, 1992, pp. 51-56.
- BLACK F., SCHOLES M., The Pricing of Options and Corporate Liabilities, in Journal of Political Economy, 1973, pp. 637-659.
- BOYLE P., Options: A Monte-Carlo Approach, in Journal of Financial Economics, May 1977.
- BOWIE J., CARR P., Static Simplicity, in Risk, August 1994.
- CASTAGNOLI E., Aspetti Introduttivi delle Opzioni Finanziarie, Coop. Don Milani Torino, 1990.
- CARR P., European Put-Call Symmetry, Cornell University Working Paper, 1994.
- COX J.C., ROSS, S.A. RUBINSTEIN M., Option Pricing: A Simplified Approach, in Journal of Financial Economics, 1979, pp. 229-263.
- DEMBO R., PATEL P., Protective Basket, in RISK (ed.), From Black-Scholes to Black Holes, 1992, pp.131-146.
- DERMAN E., KANI I., Static Replication of Exotic Options, in RISK (ed.), Developing, Pricing and Hedging Exotic Options, Atti del Convegno Risk Exotic Options Conference, London, December 1993.
- DUBIRE B., Model Art, in Risk, September 1993.
- DUPIRE P., Barrier Options, What Are They", in RISK (ed.), Developing, Pricing and Hedging Exotic Options, Atti del Convegno Risk Exotic Options Conference, London, December 1993.
- GALITZ L., Financial Engineering, Financial Times, Pitman Publishing, 1994.
- GARMAN M., Reflection in Tranquillity, in Risk, March 1989.
- GARMAN M., KOHLHAGEN S.W., Foreign Currency Option Values, in Journal of International Money and Finance, 1983, pp. 231-237.
- GOLDMAN B., SOSIN H., GATTO M. A., Path Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High, in Journal of Finance, December 1979.
- GOLDMAN SACHS, Hurdles in Using Barrier Options, in RISK (ed.), Developing, Pricing and Hedging Exotic Options, Atti del Convegno Risk Exotic Options Conference, London, December 1993.

- GRANNIS S., An Idea whose Time Has Come, in RISK (ed.), From Black-Scholes to Black Holes, 1992, pp. 131-146.
- HORAT M. B., Financial Futures e Opzioni, Il Sole 24 Ore Libri, 1992.
- HOWSCROFT B., STOREY C., Management and Control of Currency and Interest Rate Risk, Woodhead-Faulkner, 1989.
- HUDSON M., The Value in Going Out, in Risk, March 1991.
- HULL J., Introduzione ai Mercati dei Futures e delle Opzioni, Il Sole 24 Ore Libri, 1994.
- HULL J., Options, Futures and Other Derivative Securities, Prentice Hall, 1993.
- HULL J., WHITE A., Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options, in The Journal of Derivatives, 1993, pp.21-31.
- LEONG K., Estimates, Guesstimates And Rules Of Thumb, in RISK (ed.), From Black-Scholes to Black Holes, 1992a, pp. 63-69.
- LEONG K., Exorcising the Demon, in RISK (ed.), From Black-Scholes to Black Holes, 1992b, pp. 57-62.
- LEONG K., Solving the Mystery, in RISK (ed.), From Black-Scholes to Black Holes, 1992c, pp. 83-88.
- LEVY E., Asian /Average Options, in RISK (ed.), Developing, Pricing and Hedging Exotic Options, Atti del Convegno Risk Exotic Options Conference, London, December 1993.
- KOZIOL J., Hedging, John Wiley & Sons, 1990.
- MARGRABE W., The Value of an Option to Exchange One Asset for Another, in Journal of Finance, March 1978, pp.177-186.
- MERTON C., Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous, in Journal of Financial Economics, 1976, pp. 125-144.
- PISTARINO C., Opzioni Esotiche, Banca Profilo, Quaderno 4.
- REINER E., Quanto Mechanics, in Risk, March 1992, pp.59-63.
- ROLL R., An Analytical Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends, in Journal of Financial Economics, 1977, pp. 251-258.
- RUBINSTEIN M., Asian Options, in RISK (ed.), Developing, Pricing and Hedging Exotic Options, Atti del Convegno Risk Exotic Options Conference, London, December 1993.
- RUBINSTEIN M., Double Trouble, in Risk, December 1991-January 1992a.
- RUBINSTEIN M., Guiding Force, in RISK (ed.), From Black-Scholes to Black Holes, 1992b.

- RUBINSTEIN M., One for Another, in Risk, July-August 1991a.
- RUBINSTEIN M., Options for the Undecided, in Risk, April 1991b.
- RUBINSTEIN M., Packages, in Risk, December 1991c.
- RUBINSTEIN M., Pay Now, Choose Later, in Risk, February 1991d.
- RUBINSTEIN M., Somewhere Over the Rainbow, in Risk, November 1991e.
- RUBINSTEIN M., REINER E., Breaking Down the Barriers, in Risk, September 1991a.
- RUBINSTEIN M., REINER E., Unscrambling the Binary Code, in Risk, October 1991b.
- SHARPE W., Investments, Prentice Hall, 1978.
- SMITHSON C., Wonderful, in Risk, October 1991, pp. 37-44.
- THE GLOBECON GROUP LTD (ed.), Derivatives Engineering '95.
- TURNBULL S., The Price is Right, in Risk, April 1992.
- WHALEYE R.E., On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends, in Journal of Financial Economy, 1981, pp. 207-212.
- WHITE A., Valuing Path Dependent Derivatives, in RISK (ed.), Developing, Pricing and Hedging Exotic Options, Atti del Convegno Risk Exotic Options Conference, London, December 1993.
- WILMOTT P., DEWINNE J., HOWISON S., Option Pricing, Oxford Financial Press, 1993.



## QUADERNI DEL DIPARTIMENTO DI ECONOMIA

- 1 **Marco CRIVELLINI**, *Vincoli organizzativi- imprenditoriali allo sviluppo: una stilizzazione all'approccio di Ancona*, aprile 1983.
- 2 **Paolo ERCOLANI**, *Prezzi relativi e sviluppo economico: un'analisi dell'evidenza empirica*, luglio 1983.
- 3 **Riccardo MAZZONI**, *Costi comparati e sviluppo regionale: un'analisi empirica*, maggio 1984.
- 4 **Paolo ERCOLANI**, *Sviluppo economico e mutamenti di struttura*, ottobre 1984.
- 5 **Valeriano BALLONI**, *Processi di integrazione nelle ristrutturazioni industriali*, ottobre 1984.
- 6 **Franco SOTTE, Luisa QUATTRINI, Simone RUSPOLI**, *Indagine sulle tipologie aziendali nell'agricoltura delle Marche*, maggio 1985.
- 7 **Geminello ALVI**, *Due scritti eterodossi sulla scienza in economia e la sua storia*, maggio 1985.
- 8 **Luca PAPI**, *Scelte e conseguenze della politica monetaria del primo dopoguerra*, giugno 1986.
- 9 **Massimo TAMBERI**, *Il modellaccio 2: analisi storica dei parametri diretti*, febbraio 1988.
- 10 **Luca PAPI**, *Dynamic specification in U.K. Demand for Money Studies*, marzo 1988.
- 11 **Enzo PESCIARELLI**, *Smith, Bentham and the Development of Contrasting Ideas on Entrepreneurship*, giugno 1988.
- 12 **Alessandro STERLACCHINI**, *Progresso tecnico, attività innovative e crescita della produttività: approcci teorici a livello inter- industriale*, ottobre 1988.
- 13 **Carlo GIANNINI**, *Cointegrazione, analisi di rango e stima consistente dello spazio di cointegrazione partendo dalle stime di un VAR in livelli*, marzo 1989.
- 14 **Carlo GIANNINI, Rocco MOSCONI**, *Non stazionarietà, integrazione, cointegrazione: analisi di alcuni aspetti della letteratura recente*, marzo 1989.
- 15 **Valeriano BALLONI**, *Strutture di mercato e comportamento strategico delle imprese. Il caso dell'industria americana degli elettrodomestici*, 1989.
- 16 **Mauro GALLEGATI, Massimo TAMBERI**, *Divergent Trajectories in Europe: An Analysis of the Recently Developed Countries*, ottobre 1989.
- 17 **Enrico SANTARELLI**, *R & D, Innovation, and the Signalling Properties of the firm's Financial Structure*, maggio 1990.
- 18 **Daniela FELIZIANI**, *Il dibattito internazionale sul tempo di lavoro: una nota introduttiva*, settembre 1990.
- 19 **Massimo TAMBERI**, *Pionieri, Imitatori e Processi di Catching-up*, novembre 1990.
- 20 **Antonio Giulio CALAFATI**, *Processo economico e ambiente naturale in K.W. Kapp*, dicembre 1990.
- 21 **Carlo GIANNINI**, *Topics in Structural Var Econometrics*, luglio 1991.

- 22 **Andrea RICCI**, *Il concetto di integrazione nella teoria economica: una breve rassegna critica*, agosto 1991.
- 23 **Claudio CASADIO TARABUSI, Stefano BRESCHI**, *A Selection Model of Economic Competition: The Role of Market Power and Technological Change*, dicembre 1991.
- 24 **Stefano STAFFOLANI**, *L'inserimento professionale dei giovani diplomati in Italia e in Francia*, dicembre 1991.
- 25 **Enrico SANTARELLI, Alessandro STERLACCHINI**, *Profili e determinanti settoriali della formazione di nuove imprese nell'industria italiana*, aprile 1992.
- 26 **Giorgio FUÀ**, *Appunti sulla crescita economica*, aprile 1992.
- 27 **Stefano STAFFOLANI**, *La flessibilità quantitativa nella gestione del fattore lavoro: una analisi teorica*, aprile 1992.
- 28 **Carlo GIANNINI, Antonio LANZAROTTI, Mario SEGHELINI**, *A Traditional Interpretation of Macroeconomic Fluctuations: the Case of Italy*, maggio 1992.
- 29 **Riccardo MAZZONI**, *I mercati locali del lavoro in Italia*, luglio 1992.
- 30 **Alessandro BARTOLA, Franco SOTTE, Giuseppe BUONCOMPAGNI**, *L'AIMA*, luglio 1992.
- 31 **Renato BALDUCCI**, *"Crescita in regime di rendimenti di scala costanti"*, febbraio 1993.
- 32 **Carlo A. FAVERO**, *"Ottimizzazione intertemporale e metodi econometrici in economia"*, maggio 1993.
- 33 **Alessandro BARTOLA, Franco SOTTE, Andrea FANTINI, Raffele ZANOLI**, *"L'agricoltura nelle Marche. Tendenze settoriali e politica agraria"*, maggio 1993.
- 34 **Riccardo MAZZONI**, *Sviluppo economico e localizzazione produttiva*, giugno 1993.
- 35 **Alberto ZAZZARO**, *Costi di liquidità e costi di solvibilità: il ruolo delle banche locali nello sviluppo economico regionale*, giugno 1993.
- 36 **Domenico MIGNACCA**, *An Application of a Structural VAR Technique to Interpret UK Macroeconomic Fluctuations*, giugno 1993.
- 37 **Stefano MANZOCCHI, Domenico MARINUCCI**, *Technology Adoption Under Strategic Complementarity: "Less" Information Can Do Better*, giugno 1993.
- 38 **Antonio G. CALAFATI**, *Scelta e Azione*, giugno 1993.
- 39 **Gabriele CATTAROZZI**, *Gestione delle obbligazioni e curva di inviluppo*, luglio 1993.
- 40 **Alberto ZAZZARO**, *Le banche in un'economia regionale: una rassegna della letteratura*, settembre 1993.
- 41 **Alessandro VAGLIO**, *A model of the audience for TV broadcasting implications for advertising competition and regulation*, ottobre 1993.
- 42 **Carlo A. FAVERO, Riccardo LUCCHETTI**, *Output, interest rates and the monetary transmission mechanism: some empirical evidence for Italy*, ottobre 1993.
- 43 **Riccardo LUCCHETTI**, *Modelli in differenze con errori di misura*, novembre 1993.
- 44 **Stefano STAFFOLANI**, *Lavoro a turni e durata di utilizzo del capitale*, novembre 1993.
- 45 **Alessandro STERLACCHINI**, *La ricerca universitaria in Italia*, novembre 1993.
- 46 **Daniela FELIZIANI**, *Organizzazione e regolamentazione degli orari di lavoro nei paesi industrializzati*, marzo 1994.
- 47 **Alessandro STERLACCHINI**, *The birth of new firms in Italian manufacturing*, marzo 1994.
- 48 **Franco SOTTE, Giuseppe BUONCOMPAGNI**, *An overview on public transfers in the Italian Agricultural Policy*, marzo 1994.
- 49 **Pietro ALESSANDRINI, Andrea RICCI**, *Squilibri demografici e scarsità di risparmio nell'economia mondiale*, marzo 1994.
- 50 **Alberto ZAZZARO**, *La specificità delle banche: teorie ortodosse e teorie eterodosse a confronto*, maggio 1994.
- 51 **Carlo MONTICELLI, Luca PAPI**, *La definizione di moneta in economie aperte e integrate: verso l'"eutanasia" del concetto di moneta nazionale?*, maggio 1994.
- 52 **Riccardo LUCCHETTI, Stefano STAFFOLANI**, *Orario di lavoro e occupazione: un approccio teorico con una applicazione alla grande industria italiana*, luglio 1994.
- 53 **Riccardo LUCCHETTI**, *Companion form representation of cointegrating VARs*, ottobre 1994.
- 54 **Paolo ERCOLANI**, *La terziarizzazione dell'occupazione. Analisi delle cause e dei problemi aperti*, dicembre 1994.
- 55 **Rossano BRUSCHI**, *La teoria delle aspettative razionali e la curva dei tassi di interesse a scadenza: un'applicazione al mercato monetario tedesco*, dicembre 1994.
- 56 **Roberto ESPOSTI, Pierpaolo PIERANI, Franco SOTTE**, *Fattori quasi fissi e produttività totale dei fattori in agricoltura. Teoria e applicazione ad una impresa marchigiana ex-mezzadrile*, gennaio 1995.
- 57 **Michela VECCHI**, *Human capital and excess labour*, febbraio 1995.
- 58 **Alberto BAGNAI, Stefano MANZOCCHI**, *Un'indagine empirica sulla mobilità dei capitali nei paesi in via di sviluppo*, marzo 1995.
- 59 **Domenico MIGNACCA**, *Comparing the impulse response functions of different models*, marzo 1995.
- 60 **Manuela VICONI**, *L'Unione Europea e gli shock esogeni ai sistemi economici*, marzo 1995.
- 61 **Paolo Emilio MISTRULLI, Roberto TORRINI**, *Salari di efficienza, costi di controllo e decentramento produttivo*, marzo 1995.
- 62 **Alessandro VAGLIO**, *Potere di mercato, consumi e crescita*, dicembre 1994.
- 63 **Luca PAPI, Carlo MONTICELLI**, *EU-Wide money demand: An assessment of competing approaches*, maggio 1995.
- 64 **Antonio G. CALAFATI**,  *Mercati e gerarchie nel processo di apprendimento degli agenti collettivi*, giugno 1995.

- 65 **Marco ACCORRONI, Luca PAPI**, *La valutazione dell'efficienza degli sportelli bancari*, ottobre 1995.
- 66 **Stefano STAFFOLANI**, *Interazioni nelle scelte e norme sociali*, ottobre 1995.
- 67 **Tommaso PEREZ**, *Multinational enterprises and technological spillovers: An evolutionary model*, ottobre 1995.
- 68 **Edoardo GAFFEO**, *Macroeconomics without the representative agent: Difficulties and new perspectives*, dicembre 1995.
- 69 **Pietro ALESSANDRINI, Alessandro STERLACCHINI**, *Ricerca, formazione e rapporti con l'industria: I problemi irrisolti dell'università italiana*, dicembre 1995.
- 70 **Paolo GUERRIERI, Stefano MANZOCCHI**, *Patterns of Trade and Foreign Direct Investment in European Manufacturing: "Convergence" or "Polarization"?*, marzo 1996.
- 71 **Laura CHIES, Francesco TROMBETTA**, *Riduzione dell'orario di lavoro e disoccupazione: il dibattito tedesco*, marzo 1996.
- 72 **Stefano FIORI**, *Ordine visibile e ordine invisibile. Il difficile rapporto fra natura e società nell'economia politica smithiana e presmithiana (1690-1790)*, marzo 1996.
- 73 **Paolo Emilio MISTRULLI**, *Rendita informativa, intermediazione finanziaria e scelte di portafoglio*, marzo 1996.
- 74 **Fabio FIORILLO**, *Il problema dell'isteresi in economia: confronto tra isteresi fisica e passeggiate aleatorie, significato e applicazioni economiche*, aprile 1996.
- 75 **Tommaso LUZZATI**, *Una testimonianza sull'ipotesi di piena razionalità*, maggio 1996.
- 76 **Nicola BOARI**, *Law and Economics in Action: An Efficiency Analysis of Italian Penal Procedures after 1989*, maggio 1996.
- 77 **Roberto GIORGI, Franco SOTTE**, *Riuscirà il mondo a sfamare se stesso nel 2025?*, maggio 1996.
- 78 **Alessandro STERLACCHINI**, *Inputs and Outputs of Innovative Activities in Italian Manufacturing*, giugno 1996.
- 79 **Marco GALLEGATI**, *Firm's optimal capital accumulation path with asymmetric informations and debt instead of equity finance*, giugno 1996.
- 80 **Erica SEGHETTI, Massimo TAMBERI**, *Competitività, crescita e localizzazione in un settore tradizionale*, giugno 1996.
- 81 **Pietro ALESSANDRINI**, *I sistemi locali del credito in regioni a diverso stadio di sviluppo*, settembre 1996.
- 82 **Aldo FEMA**, *Input-Output Analysis of Material Flows: an application to the German Economic System for the year 1990*, settembre 1996.
- 83 **Michela VECCHI**, *Increasing Returns versus Externalities: Pro-Cyclical Productivity in US and Japan*, ottobre 1996.
- 84 **Stefano FIORI**, *Conoscenza e informazione in F.A. von Hayek*, ottobre 1996.
- 85 **Cecilia BENVENUTO**, *Le opzioni esotiche: Problemi di pricing e copertura*, ottobre 1996.